RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Per le Note e Memorie dei soci che sorpassano le 16 pagine di stampa, rimane a carico dell'Autore la *spesa di composizione* delle pagine eccedenti, in ragione di L. 3, 15 per ogni pagina o parte di essa.

Gli Autori che desiderano *Estratti* delle Note o Memorie inserite nei Rendiconti, sono vivamente pregati di avvertirne la *Redazione* nell' atto di rinviare le prove di stampa. A fine di agevolare i soci nella pubblicazione dei loro lavori, gli estratti saranno ad essi mandati a mano a mano che procede la stampa del fascicolo.

Il prezzo degli estratti è regolato come segue:

Per un foglio di 8 pagine, o meno:

50 esemplari = L. 5; 100 = L. 7, 75; 150 = L. 11; 200 = L. 13, 75; 250 = L. 17.

Per ogni foglio successivo di pagine 8, o parte di esso (oltre la spesa di composizione, come sopra, per le pagine eccedenti i due fogli di stampa):

50 esemplari = L. 3, 75; 100 = L. 5, 25; 150 = L. 7, 25; 200 = L. 8, 75; 250 = L. 10, 75.

REDAZIONE: 28, via Ruggiero Settimo — Palermo.

Tipografia e Fonderia di Caratteri di M. AMENTA, via Vittorio Emanuele, 431, Palermo.
Proto-compositore: S. Luminaria.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO II.

PARTE PRIMA: MEMORIE E COMUNICAZIONI.

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
28, via Ruggiero Settimo, 28
1888.

CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

STATUTO DELLA SOCIETÀ

discusso ed approvato dall'Assemblea generale dei soci del dì 26 febbrajo 1888.

Scopo della Società. — Sede.

ARTICOLO PRIMO. — La società scientifica *Circolo Matematico di Palermo* ha per iscopo l' incremento e la diffusione delle scienze matematiche in Italia.

ART. 2. — A tal fine, il Circolo :

a) Tiene adunanze nella sua sede.

b) Pubblica una rivista periodica di matematica col titolo : *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

Potrà inoltre istituire concorsi a premi e farsi promotore di congressi scientifici nelle varie città del Regno.

ART. 3. — La sede della Società è in Palermo, ed è inamovibile.

Dei Soci. — Ammissione. — Contribuzioni.

ART. 4. — Il Circolo si compone di due categorie di soci : *residenti* e *non residenti.* Nella prima si comprendono coloro che hanno in Palermo dimora abituale.

Gli stranieri possono far parte della società.

Art. 5. — Il numero dei soci *residenti* e *non residenti* è illimitato.

Art. 6. — Per l'ammissione al Circolo è necessario: 1° Essere proposto, in un'adunanza, da due soci (residenti o non residenti) mediante domanda, per iscritto, al Presidente; 2° ottenere, nell'adunanza seguente, i suffragi della maggioranza dei soci presenti.

Art. 7. — Ogni socio *residente* è tenuto al pagamento: 1° di una *tassa d'entrata* di L. 10, da pagarsi all'atto dell'ammissione; 2° di una *contribuzione annua* di L. 15, da pagarsi a quadrimestri anticipati, al 1° gennajo, al 1° maggio ed al 1° settembre di ogni anno. Il nuovo ammesso comincerà a pagare dal principio dell'anno in corso.

Art. 8. — Ogni socio *non residente* è tenuto al pagamento della sola *contribuzione annua* di L. 15, da versarsi, anticipatamente, al 1° gennajo di ogni anno. Il nuovo ammesso comincerà a pagare dall'anno in corso.

Art. 9. — Le dimissioni da socio del Circolo non sono valide se il dimissionario non abbia soddisfatto l'intera contribuzione annua. Esse dovranno essere dirette al Presidente che ne darà partecipazione alla Società nell'adunanza più vicina.

Chi si è dimesso può, dietro domanda da lui sottoscritta, rientrare nella Società, mediante la votazione di cui all'Art. 6.

Art. 10. — Il socio moroso, trascorsi 6 mesi dall'epoca stabilita per il pagamento, sarà, dietro avvertimento preventivo del tesoriere, radiato dall'elenco dei soci.

Art. 11. — Il versamento, in unica volta, di L. 300 conferisce il titolo di *socio perpetuo*, ed esonera dal pagamento della contribuzione annua. In caso di scioglimento della Società non si ha alcun diritto a rimborso.

Art. 12. — Il socio residente, per il fatto del trasferimento della

sua dimora abituale, è ascritto fra i non residenti, senza poter ripetere il rimborso della tassa d'entrata. È tenuto al pagamento della medesima il socio non residente che acquista, per la prima volta, la qualità di residente.

Art. 13. — Tutti i soci, residenti e non residenti, riceveranno gratuitamente i *Rendiconti* del Circolo. Ogni nuovo ammesso ha diritto al volume in corso di stampa all'epoca della sua ammissione.

Dell' Ufficio di Presidenza.

Art. 14. — La rappresentanza e la direzione amministrativa della Società spetta all' *Ufficio di Presidenza*, costituito dagli ufficiali della Società :

1 presidente,
1 vice-presidente,
2 segretari,
2 vice-segretari,
1 tesoriere,
2 bibliotecari,

eletti dai soci residenti, nel proprio seno, a scrutinio segreto.

L' Ufficio di Presidenza rimane in carica due anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 15. — Per l' elezione dell' Ufficio di Presidenza si terrà apposita adunanza straordinaria nella 1ª domenica di gennaio. Prendono parte alla votazione soltanto i soci presenti.

Ove durante il biennio rimanga vacante una carica dell'Ufficio di Presidenza, i soci residenti saranno convocati in apposita adunanza straordinaria per l'elezione del titolare.

Del Consiglio Direttivo.

Art. 16. — La direzione scientifica della Società è affidata ad un *Consiglio Direttivo*, il quale funziona da comitato di redazione della ri-

vista periodica « *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* », secondo le norme di un suo regolamento interno.

Art. 17. — Il Consiglio Direttivo è composto di 20 membri, 5 residenti e 15 non residenti, eletti dall'intera società a scrutinio segreto. In ognuna delle due categorie risultano eletti i soci che riportano maggior numero di voti. Qualora l'elezione, per parità di voti, riuscisse indecisa fra due o più candidati, si procederà a votazioni di ballottaggio, alle quali prenderanno parte soltanto i soci presenti all'adunanza.

Il Consiglio Direttivo rimane in carica tre anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 18. — Per l'elezione del Consiglio Direttivo si terrà apposita adunanza straordinaria nella terza domenica di gennajo.

Ogni socio non residente, come ogni socio residente che non possa intervenire alla detta adunanza, invierà, in una lettera da lui sottoscritta e diretta al Presidente, una scheda chiusa e suggellata indicante 20 nomi di soci, dei quali: 5 residenti e 15 non residenti.

Saranno considerate nulle le schede che non soddisfino a tutte le condizioni sopra stabilite o che pervengano all'Ufficio di Presidenza dopo le ore 3 pomeridiane del suindicato giorno.

Lo spoglio delle schede sarà fatto dal Presidente assistito dai segretari.

Art. 19. — Non vi è incompatibilità di carica fra i membri dell'Ufficio di Presidenza ed i membri residenti del Consiglio Direttivo.

Art. 20. — Entrando in carica, il Consiglio Direttivo delegherà uno dei suoi membri residenti a dirigere la pubblicazione dei Rendiconti.

Delle adunanze.

Art. 21. — Le adunanze ordinarie del Circolo si terranno la seconda e la quarta domenica del mese. La società prende due mesi di vacanza: settembre ed ottobre. Il Presidente, ove lo reputi opportuno, può, in ogni tempo, convocare i soci residenti in adunanza straordinaria.

Art. 22. — Nelle adunanze, in caso di assenza del Presidente e del Vice Presidente, il più anziano di età fra i soci presenti funzionerà da Presidente. In caso di assenza dei Segretari e dei Vice Segretari, chi presiede inviterà uno dei soci presenti a farne le veci.

Art. 23. — Entro il mese di gennajo, di ogni anno, il Presidente convocherà i soci residenti in apposita adunanza straordinaria per la revisione dei conti dell'anno decorso e l'approvazione del bilancio di previsione.

Art. 24. — Nelle adunanze del Circolo non è ammessa alcuna comunicazione o discussione sopra argomenti estranei all'indole scientifica e allo scopo della Società.

Art. 25. — Tutto ciò che riferiscesi all'amministrazione del Circolo, può essere trattato, esclusivamente, nelle adunanze straordinarie, per le quali il Presidente formulerà e parteciperà, con precedenza, ai soci residenti, apposito ordine del giorno.

Art. 26. — Le dimissioni da socio del Circolo non possono essere oggetto di discussione nè di votazione.

Art. 27. — Nelle adunanze ordinarie il Circolo è legalmente costituito qualunque sia il numero dei soci presenti.

Nelle adunanze straordinarie, tranne quelle di cui agli Art. 15 e 18, è necessaria una seconda convocazione quando nella prima non sia intervenuta almeno la metà più uno dei soci residenti.

Art. 28. — Nelle adunanze ordinarie le Comunicazioni dei soci residenti si succedono per ordine d' inscrizione. Saranno precedute dalla lettura che farà il Segretario dei titoli delle Comunicazioni dei soci non residenti, pervenute all' Ufficio di Presidenza nell' intervallo tra un'adunanza e l' altra.

Art. 29. — Rientra nelle speciali attribuzioni del Presidente tutto ciò che riferiscesi al regolamento delle adunanze ordinarie e straordinarie.

Art. 30. — I soci non residenti che si trovino temporaneamente in Palermo godono di tutti i diritti dei residenti e partecipano alle votazioni, meno quelle di cui agli Art. 15, 23 e 45.

Art. 31. — Le persone estranee che desiderano assistere alle adunanze ordinarie del Circolo, debbono, ciascuna volta, essere introdotte da uno dei soci.

Dei Rendiconti.

Art. 32. — Nei *Rendiconti* del Circolo si pubblicano, per obbligo:

1.° Gli *Estratti dai verbali* delle adunanze (redatti dai Segretari), i quali contengono il titolo e, ove occorra, un breve cenno, delle comunicazioni dei soci.

2.° Le Note e le Memorie originali comunicate dai soci ed accettate per la stampa dal Comitato di redazione.

3.° Un bollettino bibliografico della produzione matematica nazionale e straniera, il quale comprende:

a) il sommario degli articoli di matematica contenuti nelle pubblicazioni *periodiche* (atti di Accademie, riviste, giornali, etc.) colle quali il Circolo scambia i suoi Rendiconti;

b) l'elenco delle pubblicazioni di matematica *non periodiche* (opere, memorie, note, etc.) che pervengono in dono alla biblioteca del Circolo.

Art. 33. — Per tutto che concerne la rivista *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, il Consiglio Direttivo potrà attuare quelle riforme ed estensioni che stimerà opportune per accrescerne l'importanza scientifica e meglio soddisfare alle esigenze dei cultori delle scienze matematiche.

Art. 34. — Gli *Estratti dai verbali* non riproducono le discussioni scientifiche che si fanno nelle adunanze del Circolo; tuttavia se i soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a rimettere al Segretario, nell'adunanza istessa, una Nota per iscritto, la quale, in ogni caso, non potrà eccedere lo spazio di una pagina dei Rendiconti.

Art. 35. — Le Note, Memorie e Riviste bibliografiche destinate ai Rendiconti dovranno essere inedite e scritte in una delle seguenti lingue: italiana, latina, spagnuola, francese, tedesca, inglese; non potranno pubblicarsi a parte o inserirsi in altri periodici scientifici se non dopo che saranno state pubblicate dal Circolo. Gli Autori ne assumono, essi soli, la responsabilità scientifica.

Della Biblioteca.

Art. 36. — Il Circolo forma una Biblioteca e scambia i suoi Rendiconti colle raccolte scientifiche, nazionali e straniere.

Art. 37. — I libri, gli opuscoli e le raccolte periodiche acquistati o ricevuti in dono, o in cambio dei Rendiconti, restano di proprietà esclusiva del Circolo; in caso di scioglimento della Società passano di pien dritto alla Biblioteca Comunale di Palermo.

Art. 38. — Il regolamento speciale della Biblioteca, approvato dai soci residenti, potrà stabilire le norme per accordare a domicilio, a' soci residenti e non residenti, l'uso temporaneo degli opuscoli scientifici.

Art. 39. — Sui fondi provenienti dalle contribuzioni annue dei soci, non può essere stanziata alcuna somma per la Biblioteca.

Delle entrate e delle spese.

Art. 40. — Le entrate del Circolo sono:

1° le contribuzioni dei soci;

2° il prodotto della vendita dei Rendiconti;

3° i sussidii e doni che il Circolo potrà ricevere da privati o da enti morali.

Art. 41. — Le spese del Circolo si dividono in ordinarie e straordinarie. Le spese ordinarie sono:

1° le spese d'ufficio, inclusavi l'annua pigione del locale per la sede del Circolo;

2° le spese di stampa e spedizione dei Rendiconti.

Per ogni spesa straordinaria è necessaria deliberazione dell'assemblea dei soci residenti.

Art. 42. — Il Tesoriere ha la gestione economica degli affari sociali, tanto attivi che passivi, impiega i fondi disponibili, provvede alle spese ordinarie ed a quelle straordinarie votate dall'assemblea dei soci residenti.

Art. 43. — Rimangono abrogati tutti gli articoli dello Statuto provvisorio del 2 marzo 1884.

Art. 44. — Qualunque proposta per aggiunta o modificazione al presente Statuto dovrà essere sottoscritta da almeno 30 soci ed approvata dalla Società colla maggioranza di almeno $^2/_3$ dei votanti.

Art. 45. — Nel caso di scioglimento della Società l'assemblea generale dei soci residenti, coll' intervento di almeno $^2/_3$ dei medesimi, delibererà sulla destinazione dei fondi sociali rimasti disponibili.

Articolo transitorio. — Le prime elezioni per l'Ufficio di Presidenza e pel Consiglio Direttivo saranno fatte dall'Assemblea dei soci residenti, convocati in apposita adunanza straordinaria.

ELENCO DEI SOCI

(MARZO 1888)

RESIDENTI

DATA DELLA NOMINA	
1884, 2 marzo.	**Alagna** Rosario, ingegnere, prof. nel R. Istituto Margherita in Palermo — *Via Giusino, 8.*
1884, 2 marzo.	**Albeggiani** Giuseppe, socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, prof. ord. di Calcolo differenziale ed integrale nella R. Università ed inc. di Statica grafica nella R. Scuola d'applicazione per gl' Ingegneri in Palermo — *Salita Banditore, 4.*
1884, 2 marzo.	**Albeggiani** Michele Luigi, membro della Società Matematica di Francia, libero docente di Geometria analitica ed inc. di Analisi superiore nella R. Università, inc. di Stereotomia nella R. Scuola d'applicazione per gl' Ingegneri in Palermo — *Salita Banditore, 4.*
1885, 8 febbrajo.	**Albeggiani** Cesare, ingegnere — *Salita Banditore, 4.*
1887, 16 gennajo.	**Amato-Pojero** Giuseppe, dottore in Fisica, dottore in Giurisprudenza, membro della Società Meteorologica Italiana — *Piazza Marina, 6.*
1884, 2 marzo.	**Arioti** Achille, ingegnere, prof. nel R. Istituto Nautico Gioeni Trabia di Palermo — *Via della Libertà, 23.*
1885, 22 marzo.	**Basile** Eduardo — *Via Carini, 73.*
1884, 2 marzo.	**Bontade** Giovanni, ingegnere — *Piazza del Campo, 53.*
1884, 2 marzo.	**Cacciatore** Gaetano, membro della R. Società Astronomica di Londra, socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, etc.; direttore del R. Osservatorio Astronomico di Palermo — *Palazzo Reale.*

DATA DELLA NOMINA

1884, 2 marzo. **Caldarera** Francesco, socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Palermo — *Via Stabile, 95.*

1886, 21 febbrajo. **Cantone** Michele, dottore in Fisica, prof. nel R. Liceo Umberto I di Palermo — *Via Oreto, 51.*

1884, 2 marzo. **Capitò** Michele, ingegnere, prof. ord. d'Idraulica teorico-pratica ed inc. di Costruzioni fluviali e marittime nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo — *Via della Libertà, Casa Rutelli.*

1885, 8 febbrajo. **Conti** Ignazio, dottore in Matematica, prof. nel III° Ginnasio di Palermo — *Piazzetta S. Carlo, 10.*

1884, 2 marzo. **Damiani-Almeyda** Giuseppe, architetto, prof. ord. di Disegno d'ornato ed Architettura elementare nella R. Università di Palermo — *Piazza Castello, 18.*

1888, 5 febbrajo. **D' Angelo** Francesco Paolo, ingegnere — *Via Formari, 39.*

1886, 24 gennajo. **D'Arone** Giovanni — *Via Porta di Castro, 245.*

1888, 5 febbrajo. **Della Rocca** Gino, ingegnere, Regio Ispettore Capo delle Strade Ferrate — *Piazza Castelnuovo, 25.*

1885, 25 gennajo. **Di Simone** Guglielmo — *Via Principe Scordia, 11.*

1884, 2 marzo. **Fileti** Enrico, preside e prof. di Astronomia nautica nel R. Istituto Nautico Gioeni Trabia di Palermo.

1884, 2 marzo. **Gebbia** Michele, libero docente di Meccanica razionale ed incaricato di Meccanica superiore nella R. Università di Palermo — *Piazza Bologni, 23.*

1888, 5 febbrajo. **Gianforme** Antonino, prof. nel IV° Ginnasio di Palermo — *Via Montevergini, 31.*

1884, 2 marzo. **Giardina** Antonino, socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, uffiziale addetto alla Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali della R. Università di Palermo; prof. di Fisica e Meccanica elementare e Matematiche complementari nel R. Istituto Nautico Gioeni Trabia di Palermo — *Via Emerico Amari, casa Diliberto.*

1886, 24 gennajo. **Giudice** Francesco, dottore in Matematica, ingegnere, prof. nel R. Liceo Vittorio Emanuele di Palermo — *Via Cappuccini, 53.*

1888, 8 gennajo. **Grimaldi** Giovan Pietro, dottore in Fisica —*R. Università.*

1884, 2 marzo **Guccia** Giovanni Battista, dottore in Matematica, corrispondente della Società Reale delle Scienze di Liegi e della Società Filomatica di Parigi, membro della Società Matematica di Francia, consigliere provinciale — *Via Ruggiero Settimo, 28.*

DATA DELLA NOMINA	
1884, 2 marzo.	**Guidotti** Giovanni, preside e prof. di Matematica del R. Istituto Tecnico di Palermo — *Via Montevergini, 30.*
1887, 19 giugno.	**La Farina** Enrico, ingegnere — *Via Matteo Bonello, 37.*
1886, 13 giugno.	**La Manna** Antonino, ingegnere, assistente nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo — *Via Casa Professa, 22.*
1887, 13 febbrajo.	**La Manna** Domenico, ingegnere, assistente nella R. Scuola d'applicazione per gl' Ingegneri in Palermo — *Via Polacchi, 76.*
1887, 16 gennajo.	**La Mensa** Giovanni, ingegnere, prof. nel R. Istituto Tecnico di Palermo — *Via Monteleone, 76.*
1886, 18 aprile.	**Macaluso** Damiano, prof. ord. di Fisica sperimentale nella R. Università di Palermo — *R. Università.*
1884, 2 marzo.	**Maggiacomo** Filippo, socio emerito della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, prof. ord. di Geometria analitica nella R. Università di Palermo — *Corso Garibaldi, 44.*
1887, 19 giugno.	**Mastricchi** Felice, assistente al gabinetto di Fisica sperimentale della R. Università di Palermo — *Via Bandiera, 13.*
1884, 2 marzo.	**Paternò** Francesco Paolo, ingegnere, libero docente di Geometria descrittiva ed inc. di Geometria projettiva con disegno nella R. Università di Palermo — *Via Velasquez, 1.*
1884, 2 marzo.	**Pepoli** Alessandro, ingegnere, prof. nella R. Scuola Tecnica Gaggini, prof. inc. nel R. Liceo Umberto I — *Via Candelai, 19.*
1887, 13 febbrajo.	**Pertica** Emanuele, ingegnere — *Corso V. E., 53.*
1884, 2 marzo.	**Pintacuda** Carlo, ingegnere, prof. straord. di Meccanica applicata alle macchine nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo, consigliere comunale — *Via Gaggini 73.*
1887, 18 dicembre.	**Platania** Giovanni — *Vicolo Marotta, 29.*
1884, 2 marzo.	**Politi** Giuseppe, ingegnere presso la Società Italiana delle Strade Ferrate della Sicilia — *Via delle Pergole, 14.*
1884, 2 marzo.	**Porcelli** Salvatore, ingegnere, prof. nell'Educatorio Whitaker in Palermo — *Porta Guccia, Palazzo Guccia.*
1886, 7 febbrajo.	**Rotigliano** Salvatore, ingegnere, assistente nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo — *Via Torremuzza, 85.*
1884, 2 marzo.	**Salemi-Pace** Giovanni, ingegnere, prof. straord. di Meccanica applicata alle costruzioni ed inc. di Geometria pratica nella R. Scuola d' applicazione per gl' Ingegneri in Palermo — *Via Lincoln, 92.*

DATA DELLA NOMINA

1887, 4 dicembre. **Siragusa** Annibale, ingegnere, assistente nella R. Scuola di applicazione per gl'Ingegneri in Palermo — *Via Patania*, 2.

1886, 4 aprile. **Taschetti** Giuseppe, prof. nel R. Ginnasio Umberto I in Palermo — *Via Principe Scordia*, 21.

1888, 5 febbrajo. **Venturi** Adolfo, dottore in Matematica, prof. straord. di Geodesia teoretica nella R. Università di Palermo — *R. Università.*

1886, 7 febbrajo. **Zona** Temistocle, socio corrispondente della R. Accademia di Scienze Lettere e Belle Arti di Palermo, etc., 2° astronomo nel R. Osservatorio Astronomico di Palermo, libero docente di Astronomia ed inc. di Geografia fisica nella R. Università di Palermo — *Palazzo Reale.*

NON RESIDENTI

—

DATA DELLA NOMINA	
1887, 24 aprile.	**Amodeo** Federico, dottore in Matematica, libero docente di Geometria projettiva nella R. Università di Napoli. — *Vico Noce a Fonseca, 9 — Napoli.*
1888, 11 marzo.	**Arzelà** Cesare, dottore in Matematica, prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Bologna. — *Bologna.*
1888, 11 marzo.	**Bassani** Anselmo, dottore in Matematica, professore di Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno. — *Livorno.*
1886, 5 dicembre.	**Battaglini** Giuseppe, presidente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, socio della Pontaniana; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Bologna, Torino, del R. Istituto Veneto; prof. ord. di Calcolo differenziale ed integrale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Napoli. — *Via Volpicelli a Santa Chiara, 20 — Napoli.*
1888, 4 marzo.	**Beltrami** Eugenio, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro effettivo del R. Istituto Lombardo, socio effettivo pensionato della R. Accademia delle Scienze di Bologna; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Modena, Napoli, Torino, delle Società Reali delle Scienze di Gottinga e di Liegi, della Società Filomatica di Parigi; prof. ord. di Fisica matematica ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Pavia. — *Pavia.*
1888, 4 marzo.	**Bertini** Eugenio, corrispondente del R. Istituto Lombardo; prof. ord. di Geometria superiore ed inc. di Esercitazioni della Geometria superiore nella R. Università di Pavia. — *Pavia.*
1887, 4 dicembre.	**Berzolari** Luigi, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Vigevano. — *Vigevano.*

DATA DELLA NOMINA

1887, 18 dicembre. **Betti** Enrico, senatore del Regno, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia delle Scienze di Torino; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Bologna, Napoli, del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto Veneto, della Società Reale delle Scienze di Gottinga; membro onorario della Società Matematica di Londra; prof. ord. di Fisica matematica ed inc. di Astronomia e Meccanica celeste nella R. Università di Pisa; direttore della R. Scuola Normale superiore di Pisa. — *Pisa.*

1887, 4 dicembre. **Brambilla** Alberto, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Bergamo. — *Bergamo.*

1888, 5 febbrajo. **Breglia** Ernesto, ingegnere, assistente alla cattedra di Statica grafica nella R. Scuola d' applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *Via S. Nicandro, 8 — Napoli.*

1887, 20 novembre. **Brioschi** Francesco, senatore del Regno, presidente della R. Accademia dei Lincei, corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, membro effettivo del R. Istituto Lombardo, socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Torino, socio ordinario della R. Accademia delle Scienze di Napoli; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Bologna, delle Società Reali delle Scienze di Gottinga e di Praga; membro onorario della Società Matematica di Londra, membro della Società Matematica di Francia; membro del Consiglio superiore di P. I; prof. ord. d'Idraulica e direttore del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. — *Via Senato, 38 — Milano.*

1885, 14 giugno. **Cantone** Andrea, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Cosenza. — *Cosenza.*

1884, 2 marzo. **Capelli** Alfredo, dottore in Matematica, socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli; prof. ordinario di Algebra complementare nella R. Università di Napoli. — *Napoli.*

1888, 4 marzo. **Casorati** Felice, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro effettivo del R. Istituto Lombardo; corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, Bologna, Palermo, Torino, della Società Reale delle Scienze di Gottinga; prof. ordinario di Analisi infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Pavia. — *Pavia.*

DATA DELLA NOMINA

1886, 5 dicembre. **Catalan** Eugène, già allievo della Scuola Politecnica di Parigi, professore emerito dell'Università di Liegi, associato della R. Accademia del Belgio, dell'Accademia delle Scienze di Tolosa e della Società delle Scienze di Lilla; corrispondente delle Accademie delle Scienze di Pietroburgo e di Torino, dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, della Società Matematica di Amsterdam, dell'Istituto nazionale ginevrino; membro effettivo della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Società Filomatica di Parigi, della Società Matematica di Francia. — *Rue des Eburons, 21 — Liège.*

1885, 8 febbrajo **Cavallaro** Francesco, dottore in Matematica, prof. nella Regia Scuola Tecnica di Portoferrajo. — *Portoferrajo.*

1886, 5 dicembre. **Cerruti** Valentino, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, membro dell'Accademia Leopoldino-Carolina de' Curiosi della natura, membro della Società Matematica di Francia; prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1888, 11 marzo. **Chizzoni** Francesco, ingegnere, prof. ord. di Geometria descrittiva nella R. Università di Catania. — *Catania.*

1887, 4 dicembre. **Ciollaro** Gustavo, ingegnere, assistente alla cattedra di Costruzioni Idrauliche nella R. Scuola d' applicazione per gl' Ingegneri in Napoli. — *Via Duomo, 61 — Napoli.*

1887, 4 dicembre. **Costa** Gregorio, dottore in Fisica, ingegnere, assistente alla cattedra di Fisica tecnica nella R. Scuola d'applicazione per gli Ingegneri e prof. di Fisica sperimentale nel Collegio Militare di Napoli. — *Via Tribunali, 194 — Napoli.*

1887, 20 novembre. **Cremona** Luigi, senatore del Regno, *LL. D. Edinb.*, *Foreign F. R. S.*, *Hon. F. C. P. S.*; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, membro effettivo del R. Istituto Lombardo, socio delle Reali Accademie delle Scienze di Amsterdam, Bologna, Monaco, Napoli, delle Società Reali delle Scienze di Copenhagen, Gottinga, Liegi, Praga, della Società Matematica di Francia, di Praga; corrispondente della Società Filomatica di Parigi; membro onorario della Società Matematica di Londra, della Società Filosofica di Cambridge, dell' Associazione Britannica pel progresso delle Scienze; membro del Consiglio superiore di P. I.; prof. ord. di Matematiche superiori nella R. Università di Roma, direttore della R. Scuola d' applicazione per gl'Ingegneri in Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

DATA DELLA NOMINA	
1887, 16 gennajo.	**Dainelli** Ugo, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico Leonardo da Vinci. — *S. Pietro in Vincoli — Roma.*
1886, 5 dicembre.	**Del Pezzo** Pasquale, dottore in Matematica, membro della Società Matematica di Francia; libero docente di Geometria projettiva ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Napoli. — *Via Gennaro Serra, 75 — Napoli.*
1887, 13 febbrajo.	**Del Re** Alfonso, dottore in Matematica, inc. di Esercizî di Meccanica razionale nella R. Università di Napoli. — *Via Salata all' Olivella, 30 — Napoli.*
1888, 4 marzo.	**De Paolis** Riccardo, dottore in Matematica, corrispondente della R. Accademia dei Lincei; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Pisa, inc. di Statica grafica con disegno nella Scuola di applicazione per gl'Ingegneri in Pisa. — *Pisa.*
1887, 4 dicembre.	**D' Ovidio** Enrico, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, accademico residente della R. Accademia delle Scienze di Torino; corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo, della R. Accademia delle Scienze di Napoli; socio dell'Accademia Pontaniana, membro della Società Matematica di Francia; prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Torino. — *Piazza Statuto, 17 — Torino.*
1887, 4 dicembre.	**Fouret** Georges, già allievo della Scuola Politecnica, membro onorario della Società Filomatica di Parigi, già Presidente della Società Matematica di Francia; esaminatore d'ammissione alla Scuola Politecnica. — *Rue Washington, 16 — Paris.*
1887, 27 luglio.	**Gerbaldi** Francesco, dottore in Matematica, assistente per l' Algebra, la Geometria analitica e il Calcolo infinitesimale nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*
1887, 2 gennajo.	**Hirst** Thomas Archer, *Ph. D. Marburg, F. R. S., F. R. A. S., Hon. F. C. P. S.;* membro del Senato dell'Università di Londra; membro della Società Matematica e della Società Fisica di Londra, della Società Matematica di Francia; corrispondente della Società Filomatica di Parigi e delle Società di Scienze Naturali di Halle e di Marburg. — *Athenæum Club — London.*
1887, 4 dicembre.	**Humbert** Georges, già allievo della Scuola Politecnica, ingegnere delle Mine, membro titolare della Società Filomatica di Parigi, segretario della Società Matematica di Francia; ripetitore alla Scuola Politecnica. — *Boulevard Haussmann, 161 — Paris.*

DATA DELLA NOMINA	
1887, 5 giugno.	**Jung** Giuseppe, dottore in Matematica, corrispondente del R. Istituto Lombardo, membro onorario dell'Associazione Britannica pel progresso delle Scienze; prof. ord. di Statica grafica ed inc. di Geometria projettiva nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. — *Via Principe Umberto, 7 — Milano.*
1888, 11 marzo.	**Lazzeri** Giulio, dottore in Matematica, prof. di Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno. — *Livorno.*
1887, 4 dicembre.	**Loria** Gino, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria superiore nella R. Università di Genova. — *Genova.*
1884, 2 marzo.	**Maisano** Giovanni, dottore in Matematica, prof. straord. di Algebra complementare e Geometria analitica ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Messina. — *Messina.*
1886, 24 gennajo.	**Martinetti** Vittorio, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria descrittiva e projettiva con disegno ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Messina. — *Messina.*
1887, 13 febbrajo.	**Masoni** Udalrigo, dottore in Matematica, ingegnere, libero docente di Meccanica applicata alle Costruzioni ed inc. di Idraulica teoretica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *S. Potito, 45 — Napoli.*
1887, 4 dicembre.	**Mollame** Vincenzo, dottore in Matematica, prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica ed inc. di Geometria projettiva con disegno nella R. Università di Catania. — *Catania.*
1887, 4 dicembre.	**Morera** Giacinto, dottore in Matematica, prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Genova. — *Genova.*
1888, 8 gennajo.	**Murer** Vittorio, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Spezia. — *Spezia.*
1887, 4 dicembre.	**Peano** Giuseppe, dottore in Matematica, prof. di Matematiche nella R. Accademia Militare, inc. delle Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino. — *Torino.*
1888, 11 marzo.	**Pincherle** Salvatore, dottore in Matematica, corrispondente della R. Accademia dei Lincei; prof. straord. di Algebra complementare e Geometria analitica ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Bologna. — *Bologna.*
1887, 4 dicembre.	**Piuma** Carlo Maria, prof. ord. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Genova. — *Via Consolazione, 49 — Genova.*
1887, 27 febbrajo.	**Retali** Virginio, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Como. — *Como.*
1887, 13 febbrajo.	**Rindi** Scipione, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Pesaro. — *Pesaro.*

DATA DELLA NOMINA

1888, 11 marzo. **Ruffini** Ferdinando Paolo, socio effettivo pensionato e vice presidente della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, corrispondente del R. Istituto Veneto, prof. emerito della R. Università di Modena; prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Bologna; inc. di Statica grafica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Bologna. — *Bologna.*

1888, 5 febbrajo. **Ruggiero** Pietro, ingegnere, assistente alla cattedra di Resistenza di Materiali nella R. Scuola d'applicazione per gl' Ingegneri in Napoli. — *Via S. Carlo alle Mortelle, 26 — Napoli.*

1887, 4 dicembre. **Salvatore-Dino** Nicola, corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli; prof. ord. di Geometria analitica ed inc. di Geometria projettiva nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1888, 11 marzo, **Sannia** Achille, deputato al Parlamento nazionale, presidente della sezione di Architettura dell'Associazione nazionale Italiana degli scienziati, letterati ed artisti; prof. ord. di Geometria projettiva nella R. Università di Napoli; R. Commissario della Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. — *Palazzo Tarsia — Napoli.*

1887, 27 luglio. **Segre** Corrado, dottore in Matematica, libero docente di Geometria superiore e prof. suppl. di Geometria projettiva nella R. Università di Torino. — *Via Bonafus, 3 — Torino.*

1886, 13 giugno. **Spina** Raffaele, prof. nella R. Scuola Normale di Lanusei. — *Lanusei.*

1887, 4 dicembre. **Tonelli** Alberto, dottore in Matematica, prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Matematiche superiori nella R. Università di Roma. — *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

1887, 2 gennajo. **Vaněček** J.-S., corrispondente delle Società Reali delle Scienze di Praga e di Liegi e della Società Filomatica di Parigi, membro della Società Matematica di Francia; prof. nel Liceo di Jičín. — *Jičín (Boemia).*

1887, 2 gennajo. **Vaněček** M.-N., membro della Società Matematica di Francia; ripetitore nella Scuola Politecnica czeca di Praga. — *Praga (Boemia).*

1888, 11 marzo. **Veronese** Giuseppe, dottore in Matematica, corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Veneto; prof. ord. di Geometria analitica ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Padova. — *Padova.*

1887, 18 dicembre. **Vivanti** Giulio, dottore in Matematica, ingegnere. — *Mantova.*

1887, 4 dicembre. **Volterra** Vito, dottore in Matematica, prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Pisa. — *Pisa.*

Modificazioni intervenute dopo il 31 luglio 1887

[Cfr. l'Elenco del tomo I, pag. III-VII]

SOCI DIMISSIONARI

Cesàro, Tirelli.

SOCI NUOVI

Arzelà, Bassani, Beltrami, Bertini, Berzolari, Betti, Brambilla, Breglia, Brioschi, Casorati, Chizzoni, Ciollaro, Costa, Cremona, D'Angelo, Della Rocca, De Paolis, D'Ovidio, Fouret, Gianforme, Grimaldi, Humbert, Lazzeri, Loria, Mollame, Morera, Murer, Peano, Pincherle, Piuma, Platania, Ruffini, Ruggiero, Salvatore-Dino, Sannia, Siragusa, Tonelli, Venturi, Veronese, Vivanti, Volterra.

AVVERTENZA. — *I signori Soci sono vivamente pregati di far conoscere alla Segreteria del Circolo le eventuali modificazioni od aggiunte da portarsi nel precedente Elenco.*

UFFICIO DI PRESIDENZA

pel biennio 1888-89.

Presidente	**Albeggiani (G.).**
Vice Presidente	**Caldarera.**
Segretari	**Albeggiani (M. L.).** **Guccia.**
Vice Segretari	**D'Arone.** **Pepoli.**
Tesoriere	**Porcelli.**
Bibliotecari	**Platania.** **Politi.**

CONSIGLIO DIRETTIVO

pel triennio 1888-89-90.

Residenti	**Albeggiani** (G.).	
	Albeggiani (M. L.).	
	Caldarera.	
	Gebbia.	
	Guccia.	
Non residenti.	**Battaglini**	Napoli.
	Beltrami	Pavia.
	Bertini	Pavia.
	Betti	Pisa.
	Brioschi	Milano.
	Casorati	Pavia.
	Cerruti.	Roma.
	Cremona	Roma.
	Del Pezzo	Napoli.
	De Paolis	Pisa.
	D'Ovidio	Torino.
	Jung	Milano.
	Pincherle.	Bologna.
	Segre	Torino.
	Volterra	Pisa.

Delegato dal Consiglio per dirigere la pubblicazione dei *Rendiconti* (Art. 20 dello Statuto). **Guccia.**

SULLE FORME BINARIE CUBICHE

NOTA DI GEOMETRIA IMMAGINARIA

del dott. **Virginio Retali**, a Como.

Adunanza del 18 dicembre 1887.

Quando si adoperi per la forma binaria cubica la rappresentazione sopra la retta, facendo uso dei punti-circolo, si possono dare dei tre problemi fondamentali concernenti le cubiche binarie (*), soluzioni che sembrano assai più semplici di quelle note fin'oggi.

Noi riterremo che sopra la retta reale r, sostegno della forma binaria, i due elementi immaginari conjugati sieno definiti come intersezioni di r con un punto, non giacente sovr'essa, considerato come cerchio infinitesimo (*nullkreis*).

(*) Senza volere qui entrare nella storia della teoria delle forme binarie cubiche mi limito ad osservare che nella Nota del Sig. G. Pittarelli « *Gli elementi immaginari nelle forme binarie cubiche* » (*Rend. dell'Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli*, Anno XXIV, Fasc. 6°, giugno 1885) non è stato tenuto conto, a quanto pare, della *seconda* Nota del Prof. H. Schröter sull'argomento (*Th. der Oberflächen 2. O. u. s. w.* — Leipzig 1880. — p. 277-279) ove è presa la conica per sostegno della forma binaria e sono indicate soluzioni di una suprema eleganza. È bene ancora notare che v. Staudt fin dal 1862 in una Memoria, divenuta poi classica: « *Ueber die Steinerschen Gegenpunkte* » u. s. w. (*Crelle's Journal*, Bd. 62), aveva indicato la costruzione, poi attribuita ad altri geometri, dei punti uniti della projettività $A, B; B, C; C, A$ assumendo la conica per sostegno delle due forme projettive.

a) « Sulla r sia A il punto reale della cubica e i due rimanenti « elementi (immaginarî conjugati) sieno quelli segnati sopra r dal punto « circolo P: vogliamo costruire gli elementi del covariante Hessiano » della cubica ».

Soluzione. — Descrivo il cerchio K^2 passante per i due punti P, A ed avente il centro O sopra r: il cerchio di centro A e raggio $\overline{OA}$ sega K^2 in due punti reali M_1, M_2 i quali sono projettati da P sulla r nei due punti Hessiani H_1, H_2 della cubica.

b) « Dato l' elemento reale A e i due Hessiani (reali) H_1, H_2, « costruire i due elementi, immaginarî conjugati della cubica ».

Soluzione. — Sia A' il conjugato armonico di A rispetto ai due punti Hessiani H_1, H_2: il cerchio K^2 di diametro $\overline{AA'}$ e centro O seghi il cerchio di centro A e raggio AO nei due punti reali M_1, M_2; il raggio $[M_1 H_1]$ segherà il cerchio K^2, oltrechè in M_1 in un punto P che, considerato come punto-circolo, segna sopra r i due punti immaginarî cercati.

c) « Costruire il covariante cubico della cubica binaria definita sulla « retta r dal punto reale A e dal punto-circolo P (non giacente so- « pra r) ».

Soluzione. — Descritto il cerchio K^2 (col centro O, sulla r, e passante per A, P) prendasi, sulla r, $\overline{AS} = \overline{OA}$: sia inoltre S' il centro del segmento $\overline{OA}$, D' il centro del segmento $\overline{S'S}$ e D il piede della perpendicolare abbassata sopra r dal punto P; il cerchio descritto sopra $\overline{DD'}$ come diametro sega K^2 in due punti, ognuno dei quali, considerato come punto-circolo, segna sopra r i due elementi immaginarî conjugati del covariante cubico. L'elemento reale A' del covariante cubico è chiaramente il punto di K^2 diametralmente opposto ad A.

La esattezza delle costruzioni precedenti si dimostra facilmente osservando che la forma binaria cubica giacente sulla r vien projettata, dal punto P, sopra K^2, in quella che ha A per elemento reale, e per elementi immaginarî conjugati i punti ciclici.

Anche nel primo dei due problemi seguenti interviene utilmente la considerazione dei punti-circolo.

d) « Dato un punto-circolo P e una retta immaginaria di prima

« specie g_i costruire la retta reale su cui il punto-circolo segna il pun-
« to imaginario appartenente a g_i ». (*).

Soluzione. — Sia il fascio armonico $S(a\,b\,a'\,b')$ una rappresentazione della retta immaginaria g_i: la retta s, perpendicolare alla $[SP]$ nel punto P, seghi il fascio nei punti $A\,B\,A'\,B'$; costruisco la conica K^2 che ha P per fuoco e tocca a in A, a' in A'; e la conica C^2 col fuoco P e tangente b in B, b' in B': queste due coniche hanno due tangenti comuni reali u, v e, sopra ognuna di queste due rette, il punto-circolo P segna un punto della g_i.

e) « Data una retta immaginaria di prima specie g_i e dato il punto « centrale della involuzione ellittica che definisce un punto P_i di g_i co- « struire questo punto P_i ».

Soluzione. — Sia $S(a\,b\,a'\,b')$ una rappresentazione armonica di g_i: dal punto centrale dato O conduco i raggi $a_1\,b_1\,a'_1\,b'_1$ ordinatamente paralleli ad $a\,b\,a'\,b'$: i 6 punti O, S, $(a\,a'_1)$, $(b\,b'_1)$, (a', a_1), (b', b_1) sono in una conica K^2 e la tangente a questa conica nel punto O è il sostegno reale del punto immaginario cercato.

Nelle soluzioni dei due problemi precedenti si suppone nota la teoria di Staudt per la separazione degli elementi immaginarî conjugati. (**)

Como, 1 dicembre 1887.

Dr. Virginio Retali.

(*) Di questo problema ha data un'altra soluzione, ben differente, il mio amico Sig. G. Tarry, di Algeri, in una Memoria, tutt'ora inedita, presentata al Congresso tenutosi recentemente a Tolosa dall'*Assoc. Française pour l'avancement des sciences.*

(**) Cfr. v. Staudt: *Beiträge zur Geometrie der Lage,* Nürnberg 1856-60. — Lüroth: *Das Imaginare in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen* (*Mat. Annalen.* Bd. VIII. s. 145-214). Oltre al lavoro di August, citato nella Memoria del Lüroth, per una esposizione ampia e fedele della teoria di Staudt, si può consultare l'opera di Pfaff: *Neuere Geometrie* s. 240-311 del Bd. I. (Erlangen 1867).

SOPRA LA DETERMINAZIONE

DI FUNZIONI D'UNA VARIABILE

DEFINITE

PER MEZZO D'UN' EQUAZIONE CON DUE VARIABILI. (*)

UN' OSSERVAZIONE RELATIVA ALLA COSTANTE

CHE COMPARE NEGLI SVILUPPI IN SERIE DELLE FUNZIONI CIRCOLARI.

Nota del prof. **F. Giudice**, a Palermo.

Adunanze del 4 e 18 dicembre 1887.

1. Teorema. — *Se le funzioni* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$ *ammettono derivata per tutt'i valori di* x *d'un dato intervallo, ed è*

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x + y + xy), \tag{a}$$

$$\psi(x) \cdot \psi(y) = \psi(x + y), \tag{b}$$

$$\xi(x) + \xi(y) = \xi\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right), \tag{c}$$

$$\eta(x) + \eta(y) = \eta\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right), \tag{d}$$

(*) Molti si sono occupati di simili determinazioni. *Vedi*, per es.:

Cauchy *Analyse Algébrique* (Paris, Impr. Royale, 1821; pag. 103, 261). Questi ammette soltanto la continuità della funzione; ma ammette che due funzioni reali continue eguali nei valori razionali della variabile sono pure eguali nei valori irrazionali: del resto in quel tempo ancora si riteneva che ogni funzione continua avesse derivata.

Abel: *Œuvres* (Christiania, 1881; tome premier, pag. 1, 219, 389).

dev'essere, in quell'intervallo :

$$\varphi(x) = (1 + x)^b,$$

$$\psi(x) = e^{bx},$$

$$\xi(x) = b \text{ arc. sen.} x,$$

$$\eta(x) = b \text{ arc tang} x.$$

E se ammette le prime due derivate per i valori di x contenuti in un dato intervallo una funzione $f(x)$ definita con la

$$(e) \qquad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x). f(y)$$

dev'essere in tale intervallo

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{bx} + e^{-bx})$$

dove b è costante arbitraria; arc sen x *ed* arc tang x *indicano gli archi compresi fra un quadrante positivo ed un quadrante negativo aventi x, rispettivamente, per seno e per tangente.*

Siano x ed y due variabili, indipendenti, che si mantengono nell'intervallo che vogliamo considerare. Derivando la (a) una volta rispetto alla sola x ed una rispetto alla sola y troviamo

$$\varphi'(x). \ \varphi(y) = \varphi'(x + y + xy).(1 + y),$$

$$\varphi(x). \ \varphi'(y) = \varphi'(x + y + xy).(1 + x).$$

Dividendo, membro a membro, la penultima per l'ultima eguaglianza si trova :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} = \frac{1 + y}{1 + x},$$

ossia

$$\frac{\varphi'(x).(1 + x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y).(1 + y)}{\varphi(y)}.$$

Adunque, mentre x percorre l' intervallo che si considera, resta costante il rapporto $\frac{\varphi'(x).(1+x)}{\varphi(x)}$. Indicando con h questa costante avremo:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{h}{1+x},$$

da cui, integrando:

$$\log\varphi(x)=\log C(1+x)^h,$$

ove C è la costante d'integrazione.

Passando dai logaritmi ai numeri si ha:

$$\varphi(x)=C(1+x)^h.$$

Ora, sostituendo nella (a) si trova

$$C^2.\ (1+x+y+xy)^h=C.\ (1+x+y+xy)^h,$$

onde

$$C=1,\qquad \varphi(x)=(1+x)^h.$$

Analogamente si trova

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=h,$$

da cui, integrando:

$$\log\psi(x)=hx+C$$

$$\psi(x)=e^{hx+C},$$

dove C è la costante d'integrazione.

Sostituendo in (b) si trova:

$$e^{h(x+y)+2C}=e^{h(x+y)+C},$$

onde sarà:

$$C=0,\qquad \psi(x)=e^{hx}.$$

Derivando la (c) una volta rispetto alla sola x ed una rispetto alla sola y si trova:

$$\xi'(x) = \xi'(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) . \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\xi'(y) = \xi'(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) . \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dividendo, membro a membro, la penultima per l'ultima eguaglianza si ha

$$\frac{\xi'(x)}{\xi'(y)} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si mantiene adunque costante $\xi'(x) . \sqrt{1-x^2}$ mentre x percorre l'intervallo che si considera. Sia

$$\xi'(x) . \sqrt{1-x^2} = h.$$

Integrando avremo:

$$\xi(x) = h \operatorname{arc\ sen} x + C,$$

dove con arc sen x intenderemo l'arco positivo o negativo minore di un quadrante avente per seno x, perchè se vi si dovesse aggiungere un numero $N(x)$ di circonferenze, dovrebb'essere $N(x)$ una funzione che ha derivata ed ha valore intero per tutt'i valori di x contenuti nell'intervallo che consideriamo, per la qual cosa è necessario che $N(x)$ sia un intero costante per tutto l'intervallo: tal multiplo della circonferenza, essendo costante, lo possiamo comprendere in C.

Facendo $x = 0$ nell'ultima eguaglianza e nella (c), si trova

$$\xi(0) = C, \qquad \xi(0) = 0,$$

onde

$$C = 0, \quad \xi(x) = h \operatorname{arc\ sen} x.$$

Analogamente si trova

$$(x) . (1 + x^2) = h,$$

da cui, integrando:

$$\eta(x) = h.\ \text{arc tang}\, x + C,$$

dove arc tang x indica l' arco positivo o negativo minore d' ur drante avente per tangente x.

Facendo $x = 0$ nell'ultima eguaglianza e nella (d), si trov

$$\eta(0) = C, \qquad \eta(0) = 0,$$

onde:

$$C = 0, \quad \eta(x) = h \text{ arc tang}\, x.$$

Derivando la (e) due volte rispetto alla sola x e derivandol volte rispetto alla sola y si trova

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2 f''(x).\ f(y),$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2 f(x).\ f''(y).$$

Dividendo, membro a membro, la penultima per l' ultima glianza si ottiene

$$1 = \frac{f''(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(y)}{f''(y)}\,.$$

Si mantiene adunque costante, nell'intervallo che si consid rapporto $\dfrac{f''(x)}{f(x)}$; indicandolo con h^2 si ha

$$f''(x) - h^2 f(x) = 0,$$

da cui, integrando:

$$f(x) = A e^{hx} + B e^{-hx},$$

dove A e B sono le costanti d'integrazione.

Sostituendo nella (e) si trova

$$(1 - 2A).\ f(x+y) + (1 - 2B).\ f(x-y) = 0,$$

onde

$$A = B = \tfrac{1}{2}\,, \quad f(x) = \tfrac{1}{2}(e^{hx} + e^{-hx}).$$

2. Ora, è noto che la serie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

dove a_0, a_1, a_2, ... sono costanti, ammette derivata entro il cerchio di convergenza (*). Per le equazioni (a), (b), (c), (d), (e), applicando il metodo dei coefficienti indeterminati, potremo quindi avere molto facilmente gli sviluppi in serie delle funzioni binomiale, esponenziale, e circolari.

3. Ponendo nella (a)

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

ed applicando il metodo dei coefficienti indeterminati, si trova :

$$a_0^2 = a_0 \dots a_1 a_n = n a_n + (n+1) a_{n+1} \dots$$

onde

$$a_0 = 1 \dots, \; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{a_1 - n}{n+1} \dots$$

$$\varphi(x) = (1+x)^h = 1 + a_1 x + \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} x^2 + \dots$$

dove resta a determinarsi a_1 in funzione di h.

Derivando, e poi facendo $x = 0$, si tròva $h = a_1$. Abbiamo quindi, entro il cerchio di convergenza del secondo membro : (**)

$$(1+x)^h = 1 + hx + \frac{h(h-1)}{2} x^2 + \frac{h(h-1)(h-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

(*) *Vedi* per es. la *Teorica delle funzioni di variabili complesse* esposta dal dottore Felice Casorati (Pavia, 1868; pag. 270).

(**) Per questa serie si dà generalmente la dimostrazione d'Abel, quando non si ricorre alle formole di Taylor o di Maclaurin. J.-B. Labey aveva tentata una dimostrazione basandosi pure sulla $[m].[n] = [m+n]$ dove era $[m] = (1+x)^m$. (*Vedi*: *Introduction à l'Analise infinitésimale* par Léonard Euler — Paris, 1796; pag. 314).

4. Per ciò che riguarda le funzioni circolari, delle quali si possono anche avere, per le precedenti formole, le note espressioni con esponenziali imaginarie, daremo soltanto lo sviluppo di arc sen x per fare in proposito un'osservazione.

Ponendo nella (c)

$$\xi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

ed osservando essere

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = x + y - xy\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}xy\frac{x^3+y^3}{4}$$

$$-\frac{1.\,3}{2.\,4}xy\frac{x^5+y^5}{6} - \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}xy\frac{x^7+y^7}{8} - \dots$$

si trova facilmente, coll' applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati .

$$\xi(x) = h \operatorname{arc\,sen} x = a_1\left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots\right).$$

Posto $\frac{a_1}{h} = A$ sarà dunque, entro il cerchio di convergenza del secondo membro:

$$\operatorname{arc\,sen} x = A.\left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.\,3}{2.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\frac{x^7}{7} + \dots\right).$$

5. Si è sempre detto che la costante A, trattandosi di funzioni circolari, è uguale all'unità (*).

Se per seno d'un arco s'intende la metà della corda dell' arco doppio, il rapporto $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ha veramente per limite l'unità quando l'arco decresce indefinitamente; ma non si deve concludere per questo che

(*) *Vedi*, per es., Lagrange: *Œuvres* (Paris, 1831 — Tome neuvième — Pag. 54).

il valore di A è 1 necessariamente, poichè nell' ultimo sviluppo non le grandezze assolute del seno e dell' arco sono indicate con sen x ed x, ma le loro misure. Si riconosce infatti immediatamente che, se per seno d' un arco il quale potrà essere dato direttamente sopra una circonferenza o mediante la sua misura fatta con un'unità scelta arbitrariamente, intendiamo il rapporto della corda dell' arco doppio al diametro del cerchio a cui l'arco appartiene, la (c) è soddisfatta da $\xi(x) = \text{arc sen}\, x$ qualunque sia l'unità di misura dell'arco.

Premesso questo: Sia m il rapporto d' una circonferenza ad un suo arco α. Sè $x(r)$ è la misura d'un arco in raggi ed $x(\alpha)$ è la misura dello stesso arco fatta con α, abbiamo

$$x(\alpha) = \frac{m.\, x(r)}{2\pi}, \quad \frac{\text{sen}\, x(\alpha)}{x(\alpha)} = \frac{\text{sen}\, x(r)}{x(r)} \cdot \frac{2\pi}{m},$$

per cui se gli archi sono misurati con l'unità α si ha:

$$1 : A = \left(\lim \frac{\text{sen}\, x(\alpha)}{x(\alpha)}\right)_{\lim x(\alpha)=0} = \frac{2\pi}{m}$$

$$\text{sen}\, x = \left(\frac{2\pi}{m}\right)x - \left(\frac{2\pi}{m}\right)^3 \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{2\pi}{m}\right)^5 \frac{x^5}{5!} - \left(\frac{2\pi}{m}\right)^7 \frac{x^7}{7!} + \dots$$

. . . .

Sotto questo aspetto la A si può riguardare arbitraria. Precisamente la A è costante determinata dal valore arbitrariamente scelto per unità di misura degli archi come, viceversa, questa è determinata dal valore arbitrariamente prestabilito per A.

Segue ancora che, se gli archi sono misurati coll'arco già indicato con α, si ha

$$\frac{d\,\text{sen}\, x}{dx} = \cos x. \frac{2\pi}{m}.$$

Soltanto se α è l'arco di lunghezza eguale alla lunghezza del raggio è adunque $\cos x$ la derivata di sen x. È questa la supposizione ordinariamente ammessa ed è questa la ragione per cui negli sviluppi

delle funzioni circolari, pel teorema di Taylor, quali si dànno nei trattati di Calcolo, la costante di cui ci siamo occupati ha sempre il valore 1.

La scelta della costante A non ha veruna influenza sostanziale sugli sviluppi delle funzioni circolari: Conviene quindi fare $A = 1$, per la qual cosa basta prendere la lunghezza del raggio per unità di misura della lunghezza degli archi, affine di dar la forma più semplice ad essi sviluppi.

F. Giudice.

SUR UNE QUESTION ÉLÉMENTAIRE DE GÉOMÉTRIE.

Par **A. Del Re**, à Naples.

Adunanza del 5 febbrajo 1888.

1. Dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (années 1885, 1886) MM. d'Ocagne et Fouret ont montré que les courbes et les surfaces homologiques d'une certaine façon à leurs réciproques par rapport à une courbe ou surface du 2° ordre sont elles-mêmes des courbes ou des surfaces du 2° ordre. Or, je crois qu'à l'aide d'un raisonnement assez simple on peut résoudre une question plus générale que celle qu'ont posée et resolue les deux géomètres surnommés.

La question s'énonce de la manière suivante :

Étant donnée une polarité quelconque Π *(polarité par rapport à une surface du 2° ordre, ou système focale) chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface* S *et sa polaire reciproque* S' *par rapport à* Π *se correspondent dans une homographie d'espèce donnée, de telle sorte que le point* A' *correspondant d'un point* A *de* S *soit le point de contact avec* S' *du plan* α *polaire de* A.

En voici la solution :

Soit Ω l'homographie de l'espèce donnée qui doit en résulter après avoir résolu la question. Si nous faisons le produit de cette homographie par la polarité Π, puisque le plan α', polaire de A', touche S en A, dans le produit $\Omega\Pi$, la surface S correspond à elle-même de manière que le plan correspondant d'un de ses points est le plan tangent en ce point.

Or, grâce a cette propriété, $\Omega\,\Pi$ ne peut pas être une correlation générale, ni un système focale, parce qu' il n' y a, ni dans l' une, ni dans l'autre, aucune surface qui corresponde à elle-même de la manière indiquée (*). Donc $\Omega\,\Pi$ sera une polarité par rapport à une surface du 2e ordre, et S en sera la surface fondamentale.

En écrivant $\Pi' \equiv \Omega\,\Pi$, en multipliant à droite par Π (c'est-à-dire en composant Π' et $\Omega\,\Pi$ avec la polarité Π) et en observant que $\Pi^2 \equiv$ homographie identique, il en suivra

$$\Pi'\,\Pi \equiv \Omega, \qquad (1)$$

et par conséquent l'on peut énonçer le résultat suivant :

La condition cherchée est que la surface S soit du 2e ordre, et que l'homographie résultante de la composition de la polarité par rapport à cette surface avec la polarité donnée soit de l'espèce donnée.

2. Il est à remarquer qu'à l'aide des polarités Π', Π on exprime la polarité Π'', par rapport à la surface S'', de la manière suivante :

$$\Pi'' \equiv \Pi\,\Pi'\,\Pi, \qquad (2)$$

ou, ce qui est la même chose, en ayant égard à la (1) :

$$\Pi'' \equiv \Pi\,\Omega.$$

De cette rélation, et de la (1), il suit que si $\Pi\,\Omega \equiv \Omega\,\Pi$, c'est-à-pire si Ω doit être enchangeable avec Π, sera $\Pi' \equiv \Pi''$, et conséquem-

(*) On sait, en effet, que dans une correlation de l'espace, qui n' est pas une polarité, il y a, en général, une surface du 2.e ordre, lieu des points qui tombent sur les plans correspondants, et une surface de la 2.e classe, enveloppe de ces plans; et que, lors même que ces deux surfaces se superposent, le plan correspondant d'un point n' est que par des positions exceptionnelles le plan tangent en ce point. — La même chose a lieu à l'égard d'un système focale, par rapport auquel il y a une infinité de surfaces qui correspondent à elles-mêmes, mais il n' arrive que le long de certaines courbes que le plan polaire d'un point est le plan tangent en ce point. Ces courbes sont des lignes asymptotiques pour les surfaces correspondantes.

ment S' sera sa propre polaire réciproque par rapport à Π, et sa propre figure homographique dans une homographie d'espèce donnée; mais cette homographie, devant résulter autant du produit $\Pi' \Pi$ que du produit $\Pi'' \Pi \equiv \Pi \Pi'$ [cette relation se déduit de la (2) multipliant à droite par Π], coincidera avec son inverse, et conséquemment elle sera involutive; c'est-à-dire elle sera ou une involution réglée ou une homologie harmonique. Si Π est une polarité par rapport à une surface du 2e ordre, Ω peut être l'une ou l'autre de ces deux homographies; mais si Π est un système focale, Ω ne peut être q'une involution réglée. On déduit de là des énoncés très simples en rapport à la question que nous nous sommes proposée.

Il est évident que des considérations parfaitement analogues et bien plus simples permettraient de résoudre la même question dans le plan; et qu'il y a lieu à en faire une généralisation à l'espace à n dimensions.

Dans ce cas l'on a à remarquer que lorsque n est un nombre pair, la Π ne peut être qu'une polarité par rapport à une surface du 2e ordre, tandis que lorsque n est un nombre impair, Π peut être encore un système focale. (*)

A. Del Re.

(*) *Voir*, p. ex., Segre: *Sulla teoria e classificazione delle omografie in uno spazio lineare qualunque* (*Mem. della R. Accademia dei Lincei*, 1885); Aschieri: *Delle corrispondenze lineari reciproche in uno spazio lineare di specie qualunque* (*Rendiconti Ist.º Lombardo*, 1886).

SUR L'ÉQUATION D'EULER.

Par M. **G.-H. Halphen**, à Paris.

Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia.

Adunanza del 26 febbrajo 1888.

. . . .

Suivant la fine observation d'Euler, prenons une équation doublement quadratique, à deux variables x et x_1, écrivons-la sous les deux formes

$$o = F = Ax_1^2 + 2Bx_1 + C = A_1 x^2 + 2B_1 x + C_1$$

et concluons que les deux polynômes

$$X = AC - B^2, \qquad X_1 = A_1 C_1 - B_1^2,$$

dont le premier contient seulement x et le second x_1, donnent lieu à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = o.$$

Qu'il s'agisse maintenant d'intégrer une telle équation où X sera un polynôme donné, X_1 ce même polynôme avec la variable x_1, au lieu de x, le problème consistera donc à trouver, de la manière la plus générale, A, B et C par cette condition que l'on ait

$$X = AC - B^2$$

et que F *soit symétrique entre* x *et* x_1.

Cette dernière condition crée bien des embarras et l'on a dû chercher mille détours pour s'y soumettre en gardant quelque élégance dans les calculs. Voici un détour qui me parait nouveau.

Supposez une équation doublement quadratique, mais ***non symétrique***

$$ay^2 + 2by + c = a'x^2 + 2b'x + c' = 0,$$

dans laquelle a, b, c contiennent x, et a', b', c' contiennent y. Posez encore

$$X = ac - b^2, \qquad Y = a'c' - b'^2,$$

et vous en tirez aussi

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

comme on le sait fort bien. Prenez maintenant la seconde racine x_1, qui répond au même y; vous avez aussi

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

d'où vous concluez

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = 0.$$

Nous résoudrons, par conséquent, le problème en prenant

$$X = ac - b^2$$

sans autre condition, puis éliminant y entre les équations

$$a y^2 + 2 b y + c = 0$$
$$a_1 y^2 + 2 b_1 y + c_1 = 0,$$

ce qui se fait par la formule élémentaire

$$(a) \qquad (ac_1 - 2 b b_1 + c a_1)^2 = 4(b^2 - ac)(b_1^2 - a_1 c_1).$$

Voici donc l'équation d'Euler intégrée : *ayant pris trois polynômes du second degré a, b, c qui, d'ailleurs quelconques, satisfont à la condition*

$$X = ac - b^2,$$

la formule (a) donne l'intégrale.

Mais ici se présente une certaine difficulté, une obscurité pour le moins. Le choix de a, b, c comporte des indéterminées; on peut prendre, par exemple, b arbitrairement; car $b^2 + X$, polynôme du 4^e^ degré, peut être toujours décomposé en deux facteurs quadratiques a, c. Il semble donc y avoir trop d'indétermination : on doit exiger que l'unique constante arbitraire, qui seule peut exister vraiment, soit mise en évidence. C'est à quoi l'on parvient, en observant que deux polynômes doublement quadratiques et symétriques

$$\Phi(x, x_1) \quad \text{et} \quad \Phi'(x, x_1),$$

qui coïncident entre eux pour $x = x_1$

$$\Phi(x, x) = \Phi'(x, x),$$

diffèrent seulement par un terme $\lambda(x - x_1)^2$. Il suffit de les écrire explicitement pour reconnaître l'exactitude de cette proposition.

Le polynôme $a c_1 - 2 b b_1 + c a_1$, qui est au premier membre (a), devient, pour $x = x_1$, $2X$; de plus il est doublement quadratique et symétrique. Prenons donc tout autre polynôme P, doublement quadratique et symétrique, devenant aussi $2X$ pour $x = x_1$, et nous serons

assuré que ce premier membre est égal à $P + \lambda(x - x_1)^2$. L'intégrale (a) peut donc s'écrire ainsi

$$[P + \lambda(x - x_1)^2]^2 = 4XX_1.$$

Suivant les diverses formes que nous saurons imaginer pour P, nous aurons diverses formes de l'intégrale, où figurera toujours une constante arbitraire λ.

Par exemple, prenons X decomposé en deux facteurs quadratiques $X = AC$ et posons $P = AC_1 + CA_1$. Nous avons l'intégrale

$$[AC_1 + CA_1 + \lambda(x - x_1)^2]^2 = 4XX_1 = 4ACA_1C_1,$$

d'où nous tirons

$$AC_1 + CA_1 + \lambda(x - x_1)^2 = 2\sqrt{ACA_1C_1}$$

$$\frac{\sqrt{AC_1} - \sqrt{CA_1}}{x - x_1} = \sqrt{-\lambda} = \text{constante},$$

forme élégante, qu'il faut, je crois, attribuer à Laguerre.

Comme second exemple, prenons pour P le double de la seconde polaire de X; soit

$$\frac{1}{12}\left[x_1^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2x_1\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial x'} + \frac{\partial^2 X}{\partial x'^2}\right] = f$$

cette polaire, x' étant une variable mise dans X pour rendre ce polynôme homogène.

Ce choix de P fournit un polynôme doublement quadratique et symétrique, se réduisant à $2X$ pour $x = x_1$, et l'on a l'intégrale sous la forme

$$[2f + \lambda(x - x_1)^2]^2 = 4XX_1,$$

ou bien

$$\frac{f - \sqrt{XX_1}}{x - x_1} = \text{constante},$$

forme connue aussi, mais dont je ne peux nommer, avec assurance, le premier auteur, évitant de trancher une épineuse question de priorité.

On pourrait poursuivre ; car, remarquez-le bien, l'intégrale (a) n'est pas sous la forme demandée; son premier membre n'est pas doublement quadratique. Pour le rendre tel, il faut développer le carré et diviser ensuite par $(x - x_1)^2$. C'est ainsi qu'on obtient, le plus facilement, la forme élégante

$$h + \mu f + \left(\tfrac{1}{12} C_2 - \mu^2\right)(x - x_1)^2 = 0,$$

où h désigne la seconde polaire du hessien de X, et C_2 l'invariant quadratique :

$$X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4,$$

$$C_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2.$$

Comme vous savez, cette forme dernière de l'intégrale a été donnée d'abord par M. Cayley. Notre ami commun Laguerre l'avait, de son côté, retrouvée par des calculs pleins d'intérêt.

Versailles, 13 février 1888.

HALPHEN.

ALCUNE CONSIDERAZIONI ELEMENTARI

SULL' INCIDENZA DI RETTE E PIANI

NELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI,

di **Corrado Segre**, a Torino.

Adunanza del 26 febbrajo 1888.

1. Nello spazio a quattro dimensioni (nel quale si supporranno contenuti tutti gli enti di cui si dirà in seguito) diconsi *incidenti*: 1° due rette aventi un punto comune, o, ciò che è lo stesso, giacenti in un piano; 2° due piani giacenti in uno spazio (sott. « a tre dimensioni »), ossia tagliantisi in una retta; 3° una retta ed un piano aventi un punto comune, vale a dire giacenti in uno stesso spazio.

È condizione semplice l'incidenza per una retta ed un piano, doppia invece per due rette o per due piani.

Le rette ed i piani sono ∞^6. Date tre rette *indipendenti* a, b, c vi è una sola retta incidente ad esse ed è la retta comune ai tre spazi bc, ca, ab. Dati tre piani *indipendenti* α, β, γ vi è in generale un solo piano incidente ad essi ed è quello che congiunge i tre punti $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ in cui quei piani si tagliano a due a due. Però se α, β, γ passano per uno stesso punto vi sono ∞^1 piani incidenti ad essi, e cioè quelli che projettano da quel punto la *schiera* di rette (*Regelschaar*) incidente alle tre rette in cui α, β, γ son tagliati da uno spazio qualunque; essi costituiscono una delle due *schiere* di piani di una varietà conica quadratica.

2. Le rette incidenti a due piani indipendenti α, β formano una ∞^4 tale che in ogni spazio ne giace una ∞^2 costituente una congruenza lineare, mentre per ogni punto P ne passa un fascio giacente in quel piano incidente ad α, β che passa per P (piano d'intersezione dei due spazi $P\alpha$, $P\beta$).

Le rette incidenti a tre piani α, β, γ, i quali si taglino a due a due in tre punti distinti formano un *complesso* ∞^3 tale, che ogni spazio ne contiene una schiera e che per ogni punto P ne passa una, intersezione degli spazi $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$. A questo fanno eccezione i punti di α, β, γ e del piano δ' incidente a questi, giacchè per ciascuno di essi passa in generale un fascio di rette del complesso ed in particolare pei tre punti $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ (congiunti da δ') passano stelle ordinarie di rette di quello; le rette del piano δ' sono tutte contenute nel complesso.

Projettando questo su uno spazio Σ da un punto P si ottiene, ove P non stia su alcuno dei piani α, β, γ, δ', un ordinario *complesso tetraedrale*. Poichè le rette incidenti ad α, β, γ tagliano questi piani e lo spazio $P\delta'$ (vale a dire i quattro spazi di uno stesso fascio $\alpha\delta'$, $\beta\delta'$, $\gamma\delta'$, $P\delta'$) secondo quaterne di punti tutte projettive fra loro, e quindi le loro projezioni su Σ da P taglieranno secondo quaterne di punti projettive fra loro i quattro piani projezioni di α, β, γ, δ'.

Se P sta su δ', il complesso delle rette incidenti ad α, β, γ si projetta su Σ secondo un ordinario *complesso lineare*. Invero uno spazio qualunque passante per P contiene una schiera di rette di quello, la quale comprende ora una retta passante per P (e giacente in δ') e si projetta quindi, non secondo le rette di un inviluppo piano di 2ª classe come in generale, ma secondo un fascio di rette. Quelle rette poi del complesso oggettivo, le quali escono dai punti di una retta passante per P, costituiscono la schiera giacente nello spazio determinato da due di esse, e però si projettano ancora secondo un fascio di rette. Il complesso projezione ha dunque in ogni piano o per ogni punto di Σ un fascio di rette, ossia è lineare. (*)

(*) Se α, β, γ si tagliano a due a due in uno stesso punto, le rette incidenti ad essi sono quelle giacenti nella schiera dei piani incidenti ad α, β, γ (v. alla fine del n. 1) e sono anche incidenti a tutti gli altri ∞^1 piani dell'altra schiera che è

3. Le rette incidenti a quattro piani indipendenti α, β, γ, δ, i quali si taglino a due a due in sei punti distinti, formano un *sistema* (∞^2) tale che ogni spazio in generale ne contiene due. Diciamo α', β', γ', δ', risp. i quattro piani incidenti alle terne di piani $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$ $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$. Projettando quel sistema di rette sullo spazio Σ dal punto $\delta\delta'$ si avrà quel sistema di rette, che è contenuto nel complesso lineare (n. 2) projezione del complesso delle rette incidenti ad α, β, γ, e che si appoggia alla retta in cui δ incontra Σ, vale a dire si avrà una congruenza lineare avente questa retta per una direttrice. Il piano ε che dal punto $\delta\delta'$ projetta l'altra direttrice sarà evidentemente incontrato da tutte le rette del sistema considerato incidente ad α, β, γ, δ. D'altronde esso coincide con δ solo se in quella congruenza lineare la retta $\delta\Sigma$ è direttrice doppia, cioè se questa retta sta nel complesso lineare projezione del complesso delle rette incidenti ad α, β, γ, vale a dire se i tre punti d'incontro di δ con α, β, γ sono in linea retta. Ed ε coincide con α se α passa pel punto $\delta\delta'$, cioè se i tre punti di incontro di α con β, γ, δ sono in linea retta; ed analoghe condizioni si hanno pel coincidere di ε con β o con γ. Se dunque supponiamo, come faremo in seguito, che *i piani* α, β, γ, δ *si taglino a due a due in sei punti tra i quali non se ne trovino tre in linea retta*, il piano ε sarà diverso da quei quattro ed avrà luogo la seguente notevole proposizione: *Le rette incidenti ai quattro piani* α, β, γ, δ *incontrano pure un quinto piano* ε.

Ogni spazio passante per ε *taglia evidentemente* α, β, γ, δ *in quattro rette di una schiera, cioè contiene una schiera di rette del sistema incidente ad* α, β, γ, δ. Viceversa, ogni spazio che, senza passare per alcuno di questi quattro piani, contenga una schiera di rette incidenti ad essi, avrà nella sua retta d'intersezione con δ' una retta di questa schiera, retta che dovrà perciò incontrare δ; sicchè quello spazio conterrà il punto $\delta\delta'$ ed analogamente i punti $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Quindi collegando questo con le osservazioni precedenti abbiamo che *ogni spazio che ta-*

contenuta con quella nella stessa varietà quadratica. La projezione di questo complesso di rette è ora il complesso delle tangenti di un ordinario cono quadrico, oppure un complesso lineare speciale, secondo che il centro di projezione non sta, ovvero sta, su quella varietà quadratica.

gli α, β, γ, δ *in quattro rette di una schiera passa pel piano* ε *;* e che *questo piano* ε *contiene i quattro punti* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ *ed è l'unico piano al quale siano ancora incidenti tutte le rette che incontrano* α, β, γ, δ. (*)

La relazione fra i cinque piani α, β, γ, δ, ε è scambievole, essendo ciascuno di essi definito dall'incontrare tutto il sistema delle rette incidenti agli altri quattro. Chameremo quei cinque piani: ***piani associati.***

4. Per dualità, dalle proposizioni precedenti si ha:

Se quattro rette a, b, c, d *sono indipendenti e congiunte a due a due da sei spazi, tra cui non ve ne siano tre passanti per uno stesso piano, e s'indicano risp. con* a', b', c', d' *le rette incidenti alle terne di rette* bcd, cda, dab, abc, *i quattro spazi* aa', bb', cc', dd', *passeranno per una stessa retta* e. *Le cinque rette* a, b, c, d, e (che diremo *rette associate*) *sono in relazione scambievole tale che gli* ∞^2 *piani incidenti a quattro qualunque di esse incontrano pure la rimanente. Ciascuna di quelle rette si può anche definire come il luogo geometrico di un punto dal quale le altre si projettano su uno spazio secondo quattro rette di una schiera. Mentre per un punto qualunque passano in generale due soli piani del sistema* ∞^2 *nominato, per ogni punto di ciascuna delle rette* a, b, c, d, e *ne passa una schiera.*

5. *Vi sono in generale tre rette incidenti a quattro piani indipendenti dati* α, β, γ, δ *e ad una retta data* r. Invero se la punteggiata r si projetta da α, β, γ su δ si ottengono in questo piano tre fasci di raggi di centri $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ riferiti projettivamente fra loro, e dalla nota esistenza in generale di tre punti di δ in ciascuno dei quali concorrono tre raggi omologhi segue appunto l'esistenza delle tre rette nominate. (**)

(*) Che i punti $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ stiano in uno stesso piano si può anche dimostrare osservando che nell'omografia involutoria (non omologia) definita dalle tre coppie di punti omologhi $\alpha\beta$ e $\gamma\delta$, $\alpha\gamma$ e $\delta\beta$, $\alpha\delta$ e $\beta\gamma$ ai piani α, β, γ, δ sono risp. omologhi α', β', γ', δ' e quindi quelli e questi devono tagliare negli stessi quattro punti il piano direttore dell'involuzione.

(**) Se i tre punti $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ stanno su una stessa retta g, ed r si prende in guisa che incontri g, i tre fasci di raggi considerati diventano prospettivi e si ottiene, all'infuori di g, una sola retta incidente ad α, β, γ, δ ed r.

Dalla proposizione così ottenuta segue, lasciando arbitrario δ oppure r, che *le rette incidenti ai tre piani* α, β, γ *ed alla retta* r *formano una rigata cubica;* e che *il sistema delle rette incidenti ai quattro piani* α, β, γ, δ *costituisce una varietà cubica.*

Supposto che tra i sei punti d' incontro di α, β, γ, δ a due a due non se ne trovino tre in linea retta, sicchè quel sistema di rette sia ancor incidente ad un quinto piano ε (n° 3), la varietà cubica, luogo di queste rette, conterrà i piani α, β, γ, δ, ε, avrà quindi 10 *punti doppi* nei punti in cui questi s'incontrano a due a due, ed infine conterrà anche i 10 piani, ciascuno dei quali è incidente a tre di quei cinque (*). In una Nota « *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni* » pubblicata negli *Atti dell' Acc. di Torino* (vol. XXII) ed in un lavoro più ampio che si va stampando nelle Memorie della stessa Accademia, si trova studiata diffusamente quella varietà cubica (i suoi sistemi di rette, i suoi contorni apparenti, ecc.). La presente Nota dimostra per via più elementare alcuni risultati contenuti in quei lavori e ne sviluppa alcune conseguenze.

6. Date due terne di spazi, 1, 2, 3 e 4, 5, 6, e chiamando α, β, γ, e δ, ε, η i piani d'intersezione di 23, 31, 12 e di 56, 64, 45, tutte le varietà cubiche del fascio determinato da quelle due terne di spazi conterranno i nove piani d'intersezione degli spazi dell'una terna con quelli dell'altra terna, ed avranno per punti doppi i nove punti di intersezione dei piani α, β, γ con δ, ε, η. Nell'ultimo lavoro citato si osserva che in quel fascio esiste una varietà avente un decimo punto doppio ed allora dalla proprietà della configurazione dei 10 punti doppi e dei 15 piani di una tal varietà (cioè che in ogni piano vi sono quattro punti e che per ogni punto passano sei piani) vien dedotta la proposizione seguente:

Se α, β, γ *sono tre piani passanti per una stessa retta, e* δ, ε, η *tre piani passanti per un'altra retta indipendente da quella, i sei piani, ciascuno dei quali congiunge i tre punti d'intersezione di* α, β, γ *risp. con*

(*) Invece nel caso escluso che p. e. i tre punti $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ siano su una stessa retta g, segue dalla nota precedente che questa sarà una *retta doppia* per la varietà cubica.

una permutazione qualunque di δ, ε, η, cioè i sei piani congiungenti i punti

$$(\maltese)\quad \begin{array}{l} (\alpha\delta,\ \beta\varepsilon,\ \gamma\eta),\ (\alpha\varepsilon,\ \beta\eta,\ \gamma\delta),\ (\alpha\eta,\ \beta\delta,\ \gamma\varepsilon); \\ (\alpha\delta,\ \beta\eta,\ \gamma\varepsilon),\ (\alpha\varepsilon,\ \beta\delta,\ \gamma\eta),\ (\alpha\eta,\ \beta\varepsilon,\ \gamma\delta), \end{array}$$

passeranno per uno stesso punto.

Ora possiamo qui dimostrare la proposizione più elementarmente, osservando che quei sei piani sono tali che ciascuno di quelli della prima terna è incidente a ciascuno di quelli della seconda terna. Così i due piani $(\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\eta)$ e $(\alpha\delta, \beta\eta, \gamma\varepsilon)$ hanno comuni il punto $\alpha\delta$ e quello in cui si tagliano le due rette $(\beta\varepsilon, \gamma\eta)$ e $(\beta\eta, \gamma\varepsilon)$ (le quali stanno nel piano comune ai due spazi $\beta\gamma$ ed $\varepsilon\eta$), e però hanno comune la congiungente di quei due punti. Da queste relazioni fra le due terne di piani segue subito l'asserto; poichè ciascun piano della 1ª terna essendo incidente al 4° ed al 5° dovrà passare pel punto unico in cui questi si tagliano, e così il 6° piano dovrà passare pel punto stesso essendo incidente ai piani della 1ª terna, i quali si tagliano in questo. Si vede inoltre che i sei piani considerati projettano dal loro punto comune due terne di generatrici di diverso sistema di una quadrica ordinaria.

Conservando le notazioni 1, 2, ... per spazi fissate al principio di questo n°, e formando coi nove piani in cui gli spazi della terna 1, 2, 3 tagliano quelli della terna 4, 5, 6 i sei gruppi

$$(\maltese\maltese)\quad \begin{array}{l} (14,\ 25,\ 36),\ (15,\ 26,\ 34),\ (16,\ 24,\ 35); \\ (14,\ 26,\ 35),\ (15,\ 24,\ 36),\ (16,\ 25,\ 34), \end{array}$$

si verifica immediatamente che il piano incidente al 1° di questi gruppi, cioè ad 14, 25, 36, è precisamente il piano $(\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\eta)$, e che in genere il piano incidente ai tre di uno qualunque dei gruppi $(\maltese\maltese)$ è appunto il piano di ugual posto nella serie $(\maltese)$. La proposizione precedente si può dunque anche enunciare dicendo che passano per uno stesso punto i piani incidenti risp. ai sei gruppi $(\maltese\maltese)$. Quindi i sei complessi composti risp. dalle rette incidenti a questi sei gruppi di piani sono projettati da quel punto (n° 2) secondo sei complessi lineari.

Infine si verifica anche subito che ciascuno dei gruppi di tre piani (✣✣) forma coi due piani di (✣), segnati sulla orizzontale corrispondente ma non nella corrispondente verticale, un gruppo di cinque piani associati. (*)

7. Dati cinque piani indipendenti e non associati, le rette ad essi incidenti sono ∞^1 e costituiscono una rigata del 5° ordine, giacchè uno qualunque di quei cinque piani taglia la varietà delle rette incidenti agli altri quattro secondo una curva del 3° ordine, ed uno spazio qualunque passante per esso contiene due di queste rette, cioè due generatrici della rigata; od anche perchè la rigata determina su due di quei cinque piani due cubiche punteggiate univocamente ed aventi un punto unito. Quindi un sesto piano qualunque taglia la rigata in 5 punti; oppure è incontrato da tutte le generatrici negl' infiniti punti di una curva, che sarà del 3° ordine come quella secondo cui la rigata incontra ciascuno dei primi cinque piani. Tralasciando per ora questo caso particolare, e ricordando la proposizione del n° 4, abbiamo:

Sei piani indipendenti sono nel caso più generale incidenti a cinque rette determinate, le quali sono tra loro associate.

E per dualità:

Date sei rette indipendenti vi sono, nel caso più generale, cinque determinati piani incidenti ad esse, e questi sono tra loro associati.

8. I piani incidenti a cinque date rette indipendenti non associate formano una varietà del 5° ordine. Scelti tra questi ∞^1 piani, cinque non associati ed un altro qualunque, come le cinque rette date incidenti a tutti sei questi piani non sono tra loro associate, così (n° 7) tutte le ∞^1 rette incidenti ai primi cinque piani saranno pure incidenti al sesto, cioè a tutti gli ∞^1 piani. Dunque:

Gli ∞^1 piani incidenti a cinque rette indipendenti non associate sono incidenti ad ∞^1 rette; e dualmente le ∞^1 rette incidenti a cinque piani

---

(*) Altre proprietà di questa notevole figura e della sua projezione dal punto di concorso dei sei piani (●) si potrebbero avere osservando che uno qualunque di questi è direttore (luogo di punti doppi) per un' omografia involutoria che scambia fra loro le due terne di spazi 1, 2, 3 e 4, 5, 6.

indipendenti non associati sono incidenti ad ∞^1 *piani. La rigata costituita dalle* ∞^1 *rette e la varietà costituita dagli* ∞^1 *piani si corrispondono tra loro per dualità e sono entrambe del* 5° *ordine. Ogni piano della varietà sega la rigata secondo una cubica; e per ogni punto della rigata passano due piani della varietà, cioè due cubiche della rigata; questa è, cioè, il luogo dei punti doppi della varietà di piani.*

La rigata e la serie infinita di piani sono entrambe ellittiche e con lo stesso modulo. (*) Projettate da un punto qualunque dànno, nello spazio ordinario, una rigata ellittica del 5° ordine generale e la sua sviluppabile bitangente che è pure ellittica e di 5ª classe (inviluppo dei piani delle cubiche contenute nella rigata).

Torino, febbrajo 1888.

(*) Le proprietà trovate della rigata rientrano in quelle delle rigate ellittiche esposte in un altro mio lavoro (*Atti Acc. di Torino*, XXI). Tanto quella rigata quanto quella varietà di piani sono *normali* per lo spazio a 4 dimensioni; vedi il n. 4 della mia Nota « *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* » (*Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, vol. III, 2° sem. 1887).

SULLE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DEL 1° ORDINE

Nota del dott. **Giulio Vivanti**, a Mantova.

Adunanza del 4 marzo 1888.

1. Sia z una funzione delle due variabili indipendenti x, y, e sieno p, q le sue derivate parziali del 1° ordine. Il prof. Morera nella sua Nota: ***Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine*** (Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova; fasc. agosto-settembre 1887) ha dimostrato che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione a derivate parziali:

$$H(x, y, p, q) = b$$

(dove b è una costante) ammetta una soluzione completa della forma:

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

è che H soddisfaccia ad un'equazione funzionale della forma:

$$\varphi[\varphi_1(H, x, p), \varphi_2(H, y, q)] = 0.$$

Questo teorema può generalizzarsi come segue:

Se z è una funzione delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$, e $p_1, p_2, \dots, p_n$ sono le sue derivate parziali del 1° ordine, la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = b \qquad (1)$$

ammetta una soluzione completa della forma:

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \qquad (2)$$

è che H soddisfaccia ad un'equazione funzionale della forma:

$$\varphi[\varphi_1(H, x_1, p_1), \varphi_2(H, x_2, p_2), \dots, \varphi_n(H, x_n, p_n)] = 0. \quad (3)$$

La dimostrazione è semplicissima. Supponendo dapprima che esista una soluzione della forma (2), ne segue che p_i sarà funzione della sola x_i; quindi derivando la (1) rispetto ad x_i si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ora $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}$ è funzione della sola x_i, o, se si vuole, delle due variabili p_i, x_i (p. es. se p_i contiene una costante arbitraria non additiva potrà $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}$ esprimersi in funzione di p_i, x_i eliminando questa costante); denotando con $\psi_i(x_i, p_i)$ tale funzione, l'equazione precedente diviene:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\psi_i(x_i, p_i) = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \; (4)$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è:

$$\frac{d\,x_i}{1} = \frac{dp_i}{\psi_i(x_i, p_i)} = \frac{dH}{0};$$

l'ultimo termine di esso ci dà $H =$ costante, i due primi $\chi_i(x_i, p_i) =$ costante; sicchè l'integrale generale della (4) sarà, indicando con F_i una funzione arbitraria:

$$F_i[H, \chi_i(x_i, p_i), x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots p_n] = 0.$$

Di qui si deduce notoriamente che l'integrale generale del sistema formato dalle n equazioni (4) sarà:

$$\Phi[H,\ \chi_1(x_1,\ p_1),\ \chi_2(x_2,\ p_2),\ \ldots,\ \chi_n(x_n,\ p_n)] = 0, \qquad (5)$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\varphi[\varphi_1(H,\ x_1,\ p_1),\ \varphi_2(H,\ x_2,\ p_2),\ \ldots,\ \varphi_n(H,\ x_n,\ p_n)] = 0. \qquad (6)$$

Supponiamo ora, reciprocamente, che sussista la (6) o la (5), e dimostriamo che in questo caso la (1) ammette necessariamente una soluzione completa della forma (2). Per questo non abbiamo che a seguire la via tracciata dal Morera. Prese n costanti $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ legate dalla relazione:

$$\Phi(h,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) = 0,$$

e denotando con p_i la funzione di x_i definita dall'equazione:

$$\chi(x_i,\ p_i) = \alpha_i,$$

la funzione:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \int p_i\, dx_i,$$

che ha la forma (2), è evidentemente una soluzione completa della (1).

Noteremo qui che la prima parte della dimostrazione del professore Morera non è valevole in alcuni casi in cui il teorema tuttavia sussiste. Sia p. es. l'equazione data

$$px + qy = h,$$

essa ha l'integrale completo della forma (2):

$$z = a \log x + (h - a) \log y + b,$$

e l'equazione funzionale assume in questo caso la forma:

$$H - px - qy = 0.$$

Ora la dimostrazione del Morera non è applicabile a questo caso, come non lo è ad alcun altro in cui le

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial y}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial x}$$

sieno identicamente nulle.

2. Il teorema precedente non sussiste più quando H contiene anche la z. In questo caso però si può dimostrare che, quando esiste un integrale della forma (2), la H deve necessariamente soddisfare ad una equazione funzionale di forma determinata; al contrario l'esistenza di una tale equazione *non* implica necessariamente l'esistenza d'un integrale della forma (2).

Supponiamo che l'equazione

$$H(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h$$

ammetta un integrale della forma (2), cioè che p_i sia funzione della sola x_i. Derivando rispetto ad x_i si avrà:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0,$$

ossia, ponendo come prima $\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \psi_i(x_i, p_i)$:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z} + \psi_i(x_i, p_i) \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \quad (i = 1, 2 \ldots, n) \tag{7}$$

Il sistema ausiliario della (7) è:

$$\frac{dx_i}{1} = \frac{dz}{p_i} = \frac{dp_i}{\psi_i(x_i, p_i)} = \frac{dH}{0}.$$

L'ultimo termine ci dà $H = a_i$, il primo ed il terzo insieme $\chi_i(x_i, p_i) = b_i$, donde $p_i = \lambda_i(x_i, b_i)$; per tale sostituzione il secondo termine diviene $\frac{dz}{\lambda(x_i, b_i)}$, ed uguagliandolo al primo si ottiene un nuovo integrale:

$$z + \mu(x_i, b_i) = c_i,$$

ossia, rimettendo per b_i il suo valore:

$$z + \mu[x_i, \chi_i(x_i, p_i)] = c_i,$$

che si può anche scrivere così:

$$z + \theta_i(x_i, p_i) = c_i.$$

L'integrale generale della (7) è adunque:

$$F_i[H, z + \theta_i(x_i, p_i), \chi_i(x_i, p_i), x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n] = 0.$$

Di qui si deduce che l'integrale generale del sistema costituito dalle n equazioni (7) è:

$$\Phi[H, z + \theta_1(x_1, p_1) + \ldots + \theta_n(x_n, p_n), \chi_1(x_1, p_1), \ldots, \chi_n(x_n, p_n)] = 0, \quad (8)$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\varphi[z + \theta_1(x_1, p_1) + \ldots + \theta_n(x_n, p_n), \varphi_1(H, x_1, p_1), \ldots, \varphi_n(H, x_n, p_n)] = 0. \quad (9)$$

Vediamo ora, reciprocamente, se possano trovarsi n funzioni $f_1(x_1)$, $\ldots$, $f_n(x_n)$ tali che $z = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$ sia un integrale dell'equazione:

$$H = h$$

e soddisfaccia la (8) [o la (9)]. Dalla (8) si ha:

$$z + \theta_1(x_1, p_1) + \ldots + \theta_n(x_n, p_n) = \Psi[H, \chi_1(x_1, p_1), \ldots, \chi_n(x_n, p_n)].$$

Ponendo per χ l'espressione $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, e rammentando che per tale valore di χ H si riduce ad una costante h, e p_i è funzione della sola x_i, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + w_i(x_i)] = \Psi[h, \xi_1(x_1), \ldots, \xi_n(x_n)],$$

dove:

$$w_i(x_i) = \theta_i\left(x_i, \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}\right), \quad \xi_i(x_i) = \chi_i\left(x_i, \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}\right).$$

Ora è chiaro che *solo per certe forme speciali della* Φ potranno trovarsi n funzioni f_i tali che la Ψ si riduca ad una somma di funzioni rispettivamente di $x_1, x_2, \ldots, x_n$; e ciò prova l' asserto.

Mantova, 26 febbrajo 1888.

VIVANTI.

SUR LA MARCHE DU CAVALIER.

Par M. **Camille Jordan**, à Paris.

Adunanza del 25 marzo 1888.

Considérons un échiquier illimité. Par le centre d'une de ses cases, menons deux axes de coordonnées parallèles aux rangées de l'échiquier; et prenons pour unité de longueur la largeur d'une case. Chacune des cases pourra être définie par les coordonnées de son centre, qui sont deux nombres entiers x, y.

Un cavalier étant posé sur la case initiale de l'échiquier, cherchons à déterminer le nombre minimum M de coups nécessaire pour l'amener sur une case donnée (m, n).

Il résulte évidemment de la symétrie de l'échiquier que M ne change pas si l'on permute les coordonnées m, n ou si l'on change le signe de l'une d'elles. Nous pourrons donc supposer qu'on a

$$m \geqq n \geqq 0.$$

D'après la règle du jeu, le cavalier arrivé à une case (x, y) pourra passer au coup suivant sur l'une des huit cases

$$(x+2, y+1), (x+2, y-1), (x+1, y+2), (x+1, y-2)$$

$$(x-2, y-1), (x-2, y+1), (x-1, y-2), (x-1, y+2).$$

Nous représenterons ces huit coups possibles, dont les quatre derniers sont inverses des précédents, par

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ A^{-1} & B^{-1} & C^{-1} & D^{-1} \end{matrix}$$

et nous désignerons par

$$A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots$$

une suite de coups contenant α coups A, β coups B, γ coups C, etc., l'ordre de succession de ces coups n'ayant manifestement aucune influence sur le déplacement final obtenu.

La série de coups considérée doit par hypothèse faire passer le cavalier de la case (0, 0) à la case (m, n). Or aucun des coups employés n'augmente x de plus de deux unités. Le nombre des coups de la suite sera donc au moins égal à $\frac{m}{2}$, si m est pair, à $\frac{m+1}{2}$ si m est impair, et dans tous les cas au plus grand entier $E\left(\frac{m+1}{2}\right)$ contenu dans $\frac{m+1}{2}$. Nous avons donc l'inégalité

$$M \overline{\gtrless} E\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

D'autre part, chacun des huit coups possibles accroît $x+y$ de l'un des quatre nombres ± 1, ± 3. Pour faire passer $x+y$ de sa valeur initiale 0 à sa valeur finale $m+n$, il faudra donc au moins μ coups, μ étant le plus petit multiple de 3 non supérieur à $m+n$; d'où l'inégalité

$$M \overline{\gtrless} E\left(\frac{m+n+2}{3}\right).$$

Enfin, chaque coup modifiant $x+y$ d'un nombre impair, M et $m+n$ seront de même parité, d'où la congruence

$$M \equiv m+n \mod 2.$$

Ces préliminaires posés, deux cas seront à distinguer, suivant que $m \geqq 2n$ ou $< 2n$.

Premier cas : $m \geqq 2n$. — Le nombre m peut être de la forme $2m'$ ou $2m' + 1$; et le nombre $m' - n$ qui ne sera pas négatif, pourra lui-même être de la forme 2λ ou $2\lambda + 1$, d'où quatre sous-cas à traiter séparément.

1° Soit $m = 2m'$, $m' - n = 2\lambda$. On aura $M \geqq m'$. Mais on peut effectivement former une série de m' coups, à savoir

$$A^{m'-\lambda} B^{\lambda}$$

qui satisfasse aux conditions du problème. On aura donc dans ce cas $M = m'$.

2° Soit $m = 2m' + 1$, $m' - n = 2\lambda$. On aura $M \geqq m' + 1$. Mais d'autre part la série des $m' + 1$ coups suivants

$$A^{m'-1-\lambda} B^{\lambda+1} C$$

satisfait au problème; donc $M = m' + 1$.

3° Soit $m = 2m'$, $m' - n = 2\lambda + 1$. On aura $M \geqq m'$. Mais d'autre part

$$M \equiv m + n \equiv 3m' - 2\lambda - 1 \equiv m' + 1 \mod 2.$$

Donc $M \geqq m' + 1$. D'ailleurs la série des $m' + 1$ coups

$$A^{m'-1-\lambda} B^{\lambda} C D$$

satisfait au problème; donc $M = m' + 1$.

4° Soit enfin $m = 2m' + 1$, $m' - n = 2\lambda + 1$. On aura $M \geqq m' + 1$. D'autre part,

$$M \equiv m + n \equiv 3m' - 2\lambda \equiv m' \mod 2.$$

Donc $M \geqq m' + 2$. Or la série des $m' + 2$ coups

$$A^{m'-2-\lambda} B^{\lambda+1} C^2 D$$

satisfait au problème. Donc $M = m' + 2$.

Deuxième cas : $m < 2n$. — Posons $m + n = \mu$, $m - n = \nu$. Ces deux nombres seront de même parité; d'ailleurs si l'on suppose $m = 2n - \alpha$, on aura

$$\mu = 3n - \alpha > 3(n - \alpha) > 3\nu.$$

Trois cas seront à distinguer suivant que μ sera de la forme $3\mu'$, $3\mu' + 1$ ou $3\mu' + 2$; mais on aura toujours $\mu' \stackrel{=}{>} \nu$.

1° Soit $\mu = 3\mu'$. Le nombre M sera au moins égal à μ'; d'autre part $\nu \equiv \mu \equiv \mu'$ mod 2. On pourra donc écrire $\mu' - \nu = 2\lambda$. Cela posé, la série des μ' coups

$$A^{\mu'-\lambda} C^{\lambda}$$

satisfera au problème; car elle fera passer $x + y$ et $x - y$ de leurs valeurs initiales zéro aux valeurs finales

$$3(\mu' - \lambda) + 3\lambda = 3\mu' \qquad = \mu$$

$$\mu' - \lambda - \lambda = \mu' - 2\lambda = \nu$$

qu'elles doivent avoir. Donc on aura ici $M = \mu'$.

2° Soit $\mu = 3\mu' + 1$. On devra avoir $M \stackrel{=}{>} \mu' + 1$. D'ailleurs

$$\nu \equiv 3\mu' + 1 \equiv \mu' + 1 \text{ mod } 2.$$

On pourra donc poser

$$\mu' - \nu = 2\lambda + 1,$$

et l'on voit aisément que la série de $\mu' + 1$ coups

$$A^{\mu'-1-\lambda} C^{\lambda+1} B$$

satisfait à la question. Donc $M = \mu' + 1$.

3° Soit enfin $\mu = 3\mu' + 2$. On aura $M \overline{\overline{>}} \mu' + 1$. Mais d'autre part $M \equiv \mu \equiv \mu'$ mod 2; donc $M \overline{\overline{>}} \mu' + 2$. Enfin $\nu \equiv \mu \equiv \mu'$ mod 2, d'où $\mu' - \nu = 2\lambda$.

Cela posé, la série de $\mu' + 2$ coups

$$A^{\mu'-3-\lambda} C^{3+\lambda} B^2$$

satisfait au problème. Donc ici $M \doteq \mu' + 2$.

Le problème que nous venons de traiter rentre comme cas particulier dans la question générale suivante :

Étant donné un système d'équations indéterminées à coefficients entiers

$$(1) \qquad \begin{array}{c} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = M_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = M_m \end{array}$$

déterminer, parmi les systèmes de solutions qu'il comporte, celle où la somme des variables x est minimum.

On sait que les solutions cherchées, en nombre infini, sont de la forme generale

$$\begin{array}{c} x_1 = A_1 + c_{11} t_1 + \ldots + c_{1,n-m} t_{n-m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = A_n + c_{n1} t_1 + \ldots + c_{n,n-m} t_{n-m} \end{array}$$

où $(A_1, \ldots, A_n)$ est une solution particulière des équations (1); $(c_{11}, \ldots, c_{n1}), \ldots, (c_{1,n-m}, \ldots, c_{n,n-m})$ des solutions particulières, linéairement indépendantes, des mêmes équations privées de seconds membres; enfin $t_1, \ldots, t_{n-m}$ des entiers arbitraires, positifs ou négatifs.

Si l'on pose en particulier $t_1 = \pm 1$, $t_2 = \ldots = t_{n-m} = 0$, on obtiendra les deux solutions

$$(A_1 \pm c_{11}, \ldots, A_n \pm c_{n1}).$$

Comparons la somme des modules dans ces solutions et dans la solution primitive $A_1, \ldots, A_n$, à laquelle elles sont contigües.

Si nous admettons que l'on ait

$$(2) \qquad \bmod A_1 \overline{\overline{>}} \bmod c_{11}, \ldots, \bmod A_n \overline{\overline{>}} \bmod c_{n1},$$

on aura en général

$$\bmod (A_i \pm c_{i1}) = \bmod A_i \pm \varepsilon_i c_{i1},$$

ε_i désignant une unité de même signe que A_i.

On aura donc

$$\sum \bmod (A_i \pm c_{i1}) - \sum \bmod A_i = \pm \sum \varepsilon_i c_{i1}.$$

Donc l'une des deux solutions donnera une somme de modules moindre que la solution primitive, à moins que l'on n'ait

$$\sum \varepsilon_i c_{i1} = 0,$$

auquel cas les trois solutions auront même somme de modules. Mais alors, soit, pour fixer les idées, A_k celle des quantités A qui a le plus petit module; sur les deux quantités $A_k \pm c_{k1}$ qui la remplacent respectivement dans les deux solutions contigües que nous considérons, il y en aura une dont ce module sera $< \bmod A_k$.

Donc toute solution $(A_1, \ldots, A_n)$ satisfaisant aux inégalité (2) est contigüe à une autre solution dans laquelle la somme des modules est diminuée, ou cette somme restant constante, le module minimum est diminué.

En passant de cette seconde solution à sa contigüe, on diminuera de nouveau la somme des modules ou le module minimum et l'on pourra poursuivre cette réduction jusqu'à ce qu'on arrive à une solution $(B_1, \ldots, B_n)$ pour laquelle l'une au moins des inégalités

$$\bmod B_1 \overline{\overline{>}} \bmod c_{11}, \ldots, \bmod B_n \overline{\overline{>}} \bmod c_{n1}$$

cesse d'avoir lieu.

Soit, pour fixer les idées,

$$\bmod B_1 < \bmod c_{11}.$$

La solution générale des équations (1) sera

$$(3)\quad \begin{aligned} x_1 &= B_1 + c_{11} t_1 + \ldots + c_{1,n-m} t_{n-m} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= B_n + c_{n1} t_1 + \ldots + c_{n,n-m} t_{n-m}. \end{aligned}$$

Soit δ le plus grand commun diviseur des coefficients $c_{11}, \ldots, c_{1,n-m}$. Posons

$$\frac{c_{11} t_1 + \ldots + c_{1,n-m} t_{n-m}}{\delta} = u_1.$$

On pourra déterminer $n - m - 1$ fonctions linéaires $u_2, \ldots, u_{n-m}$ des variables t telles que le déterminant des fonctions $u_1, \ldots, u_{n-m}$ soit égal à l'unité. Les équations qui lient les u avec les t étant résolues par rapport à ces dernières variables, permettront de les exprimer par des fonctions linéaires des u, à coefficients entiers. Substituant ces valeurs dans les équations (3) elles prendront la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 + \delta u_1 \\ x_2 &= B_2 + d_{21} u_1 + d_{22} u_2 + \ldots + d_{2,n-m} u_{n-m} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= B_n + d_{n1} u_1 + d_{n2} u_2 + \ldots + d_{n,n-m} u_{n-m} \end{aligned}$$

où les u pourront prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Posons en particulier $u_1 = 0$, $u_2 = \pm 1$, $u_3 = \ldots = u_{n-m} = 0$; nous obtiendrons deux solutions nouvelles

$$(B_1, B_2 \pm d_{22}, \ldots, B_n \pm d_{n2})$$

contigües à $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ par rapport à la variable u_2.

Si l'on suppose

$$(4) \qquad \operatorname{mod} B_2 \overline{\gtrless} d_{22}, \ \ldots, \ \operatorname{mod} B_n \overline{\gtrless} d_{n2}$$

on aura, en désignant par ε_i' une unité de même signe que B_i,

$$\sum \operatorname{mod}(B_i \pm d_{i2}) - \sum \operatorname{mod} B_i = \pm \sum_2^n \varepsilon_i' d_{i2}.$$

La somme des modules sera donc diminuée dans l'une des solutions nouvelles, à moins qu'on n'ait

$$\sum \varepsilon_i' d_{i2} = 0,$$

auquel cas elle restera la même dans les trois solutions. Soit alors B_k celle des quantités $B_2, \ldots, B_n$ qui a le plus petit module; on pourra déterminer le double signe dans l'expression $B_k \pm d_{k2}$ de telle sorte que son module soit $< \operatorname{mod} B_k$.

Donc toute solution satisfaisant aux inégalités (4) est contigüe à une autre dans laquelle la somme des modules est diminuée, ou cette somme restant constante, le plus petit des modules des quantités $B_2, \ldots, B^n$ sera diminué.

En répétant cette réduction, on arrivera, sans jamais accroitre la somme des modules, à une solution où l'une au moins des inégalités (4) cessera d'avoir lieu.

Soit $(B_1, C_2, \ldots, C_n)$ cette solution, et supposons pour fixer les idées

$$\operatorname{mod} C_2 < \operatorname{mod} d_{21}.$$

La forme générale des solutions sera

$$\begin{aligned}
x_1 &= B_1 + \delta u_1 \\
x_2 &= C_2 + d_{21} u_1 + d_{22} u_2 + \ldots + d_{2,n-m} u_{n-m} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= C_n + d_{n1} u_1 + d_{n2} u_2 + \ldots + d_{n,n-m} u_{n-m}.
\end{aligned}$$

Soit δ' le plus grand commun diviseur de $d_{22}, \ldots, d_{2,n-m}$ et soient

$$v_2 = \frac{d_{22}u_2 + \ldots + d_{2,n-m}u_{n-m}}{\delta'}, \; v_3, \; \ldots, \; v_n$$

des fonctions linéaires des u, de déterminant 1.

On pourra mettre la solution générale sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 + \delta u_1 \\ x_2 &= C_2 + d_{21}u_1 + \delta' v_2 \\ x_3 &= C_3 + d_{31}u_1 + e_{32}v_2 + \ldots + e_{3,n-m}v_{n-m} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= C_n + d_{n1}u_1 + e_{n2}v_2 + \ldots + e_{n,n-m}v_{n-m} \end{aligned}$$

et l'on pourra, comme tout à l'heure, en prenant les contigües successives de la solution $(B_1, C_2, \ldots, C_n)$ par rapport à v_3 arriver à une nouvelle solution $(B_1, C_2, D_3, \ldots, D_n)$ où la somme des modules ne soit pas accrue, et où l'un au moins des coefficients D, tel que D_k, satisfasse à l'inégalité

$$\mod D_k < \mod e_{k3}.$$

Continuant ainsi, on voit que parmi les solutions $(x_1, \ldots, x_n)$ des équations proposées, où la somme des modules est minimum, il en existe nécessairement une dans laquelle $m - n$ des quantités $x_1, \ldots, x_n$ ont leurs modules inférieurs à des limites fixes et indépendantes des quantités $M_1, \ldots, M_m$.

Ces solutions réduites sont en nombre limité. Supposons en effet que $x_{m+1}, \ldots, x_n$ aient leurs modules limités. À chacun des systèmes de valeurs en nombre limité dont ces variables sont susceptibles correspond un seul système de valeurs de $x_1, \ldots, x_m$ défini par les équations (1) (lequel système devra même être rejeté s' il donne des valeurs fractionnaires).

Le minimum cherché de la somme des modules s'obtiendra d
par un nombre limité d'opérations. Il suffit en effet de déterminer c
somme dans chacune des solutions réduites et de s'arrêter à celles
cette somme est minimum.

Paris, 13 mars 1888.

JORDAN.

SULLA

TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI.

Nota del prof. **Vito Volterra**, a Pisa.

Adunanza del 25 marzo 1888.

1. In una Nota pubblicata nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (*) ho accennato come la teoria delle equazioni differenziali lineari possa ridursi al calcolo infinitesimale relativo alle sostituzioni, e nella prima parte di una Memoria pubblicata dalla « Società dei XL » (**) ho esposto il calcolo infinitesimale delle sostituzioni nel caso in cui esse fossero funzioni di variabili reali.

Queste ricerche costituiscono uno studio preliminare alla teoria delle sostituzioni i cui elementi sono funzioni di una variabile complessa.

Mi pregio di presentare a cotesta Onorevole Società alcuni resultati ottenuti nello studio delle sostituzioni funzioni di una variabile complessa.

2. Chiamo *sostituzione olomorfa* in un campo σ *una sostituzione* S i cui elementi considerati come funzioni di una variabile complessa z sono olomorfi entro il campo σ di variabilità della z.

(*) Vol. III (1887) — 1° semestre — pag. 393.

(**) *Memorie della Società Italiana delle Scienze* (*detta dei* XL) — Serie III — Volume VI — N° 8. Per i termini ed i simboli usati nella presente Nota rimando a questa Memoria.

Estendendo il concetto di integrazione (dato nella Memoria citata, pel caso di sostituzioni funzioni di variabili reali) al caso di una sostituzione funzione di una variabile complessa, si ottiene una generalizzazione del teorema di Cauchy che può così enunciarsi:

Se T (som. 0) è una sostituzione olomorfa di z entro un campo semplicemente connesso σ, e s una linea chiusa contenuta entro σ, si ha

$$\int_s T\,dz = 1,$$

rappresentando col simbolo 1 *la identità.*

La dimostrazione di questa proposizione si ottiene applicando i teoremi dati nel § 4 della Memoria citata.

Consideriamo ora il caso in cui entro σ esistono dei luoghi singolari della sostituzione T. Si prendano due linee qualunque s_1 e s_2 nel cui interno giacciono gli stessi punti singolari, e percorrendole nello stesso senso, si formino

$$S_1 = \int_{s_1} T\,dz, \qquad S_2 = \int_{s_2} T\,dz.$$

Questi due integrali saranno in generale diversi dalla identità e diversi fra loro; ma se essi si riducono alla forma normale (Vedi Memoria citata § 2: preliminari) avremo

$$S_1 = V_1 \left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_h S_i^{(h)} \right\} V_1^{-1}$$

$$S_2 = V_2 \left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_h S_i^{(h)} \right\} V_2^{-1}$$

e le $S_i^{(h)}$ saranno le stesse tanto nell'una quanto nell'altra formula.

La sostituzione

$$W = \left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_h S_i^{(h)} \right\}$$

si chiamerà la *caratteristica delle sostituzioni* integrali S_1 e S_2, quindi:

gli integrali estesi nello stesso senso a linee nel cui interno si trovano gli stessi punti singolari hanno eguali caratteristiche.

Si ha pure il teorema correlativo per gli integrali destri e le caratteristiche relative agli integrali destri si ottengono immediatamente, note quelle degli integrali sinistri.

Se entro s_1 e s_2 giace un sòlo punto singolare, la caratteristica comune agli integrali estesi alle linee s_1 e s_2 percorse in modo da lasciare a sinistra il campo che esse racchiudono, si chiama *il residuo del punto singolare.*

Se gli elementi di T hanno in un dato punto un polo del primo ordine, *il residuo della sostituzione non dipende che dai residui degli elementi e, noti questi, può calcolarsi il residuo della sostituzione.*

3. Una sostituzione viene chiamata monodroma sopra una superficie di Riemann se i suoi elementi sono monodromi sulla superficie stessa. Gli integrali destro e sinistro di una sostituzione monodroma sopra una superficie di Riemann li chiamo sostituzioni abeliane semplici e le distinguo fra loro col nome di *sostituzione abeliana sinistra* e *sostituzione abeliana destra.*

Eseguiti sulla superficie di Riemann i tagli normali si ha il teorema:

Se si considera un taglio o una porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, i valori della sostituzione abeliana sinistra su uno degli orli del taglio saranno eguali ai valori sull' altro orlo moltiplicati a destra per una sostituzione costante.

Per le sostituzioni abeliane destre vale il teorema correlativo. Il teorema reciproco si trova pure verificato, cioè *se si ha una sostituzione tale che su di una superficie di Riemann (convenientemente sezionata) si conserva monodroma e i valori lungo un orlo di un taglio sono eguali ai valori lungo l'orlo opposto moltiplicati a destra per una sostituzione costante lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, la sostituzione sarà abeliana sinistra.*

Fra le sostituzioni abeliane destra e sinistra passa poi la relazione che *la sostituzione inversa di una sostituzione abeliana sinistra è una sostituzione abeliana destra, e reciprocamente.*

4. È evidente l' analogia che presentano le sostituzioni abeliane

semplici cogli integrali abeliani e più in generale cogli integrali di funzioni monodrome sopra superficie di Riemann. Però le sostituzioni abeliane dànno luogo ad altre classi di sostituzioni di cui le corrispondenti non esistono per gli integrali abeliani o per dir meglio si confondono colle funzioni monodrome sopra le superficie di Riemann e cogli integrali stessi.

Le sostituzioni a cui alludo sono le *sostituzioni abeliane doppie* e le *sostituzioni trasformanti.*

Sotto il nome di *sostituzione abeliana doppia* intendo una sostituzione i cui valori ai due orli di ciascun taglio eseguito sulla surperficie di Riemann si ottengono gli uni dagli altri mediante la moltiplicazione a destra e a sinistra per sostituzioni costanti (a det. = 1) lungo tutto il taglio o la porzione compresa fra nodi consecutivi. Nel caso in cui i valori lungo un orlo si ottengono da quelli sull'altro eseguendo una trasformazione mediante una sostituzione costante (det. = 1) lungo il taglio o la porzione compresa fra nodi consecutivi chiamo la sostituzione, una *sostituzione abeliana trasformante.*

I teoremi fondamentali per queste due classi di sostituzioni sono i seguenti :

Le derivate destra e sinistra di una sostituzione abeliana doppia sono sostituzioni trasformanti.

Gli integrali destro e sinistro di sostituzioni abeliane trasformanti, sono sostituzioni abeliane doppie.

Moltiplicando a destra una sostituzione abeliana semplice destra per una sostituzione abeliana semplice sinistra si ottiene una sostituzione abeliana doppia.

Trasformando una sostituzione monodroma mediante una sostituzione abeliana sinistra, si ottiene una sostituzione trasformante.

5. È utile distinguere le sostituzioni abeliane semplici in due classi : le *sostituzioni abeliane apparenti* e quelle *essenziali.* Se una sostituzione i cui elementi sono funzioni di h variabili $y_1, y_2, \ldots, y_h$, è tale che, se si sostituiscono in luogo di queste variabili un sistema qualunque di integrali di funzioni monodrome sopra una stessa superficie di Riemann, la sostituzione diviene abeliana semplice destra o sinistra, diremo che la sostituzione abeliana è apparente. Ogni sostitu-

zione abeliana semplice che non può farsi rientrare in una classe di sostituzioni abeliane apparenti, la diremo una sostituzione abeliana essenziale.

Per esempio le sostituzioni del 2^0 ordine

$$\begin{Bmatrix} y+1, & 1 \\ y, & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} e^{y} & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{Bmatrix},$$

in cui y è l'integrale di una funzione monodroma, sono sostituzioni abeliane apparenti; mentre se fra le tre funzioni $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, monodrome sopra una stessa superficie di Riemann, non passa nessuna relazione lineare

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 = 0$$

con A_1, A_2, A_3 costanti, avremo che

$$\int \begin{Bmatrix} \varphi_1, & \varphi_1 \\ \varphi_3, & -\varphi_2 \end{Bmatrix} dz$$

sarà una sostituzione abeliana essenziale.

Tutte le sostituzioni abeliane sinistre apparenti sono date da

$$S = \int \prod_{1}^{b}{}_i \, T_i \, dy_i$$

ove le T (som. 0) *sono sostituzioni costanti.*

Ora, se le T_i sono costanti, affinchè

$$\prod_{1}^{b}{}_i \, T_i \, dy_i$$

sia un differenziale esatto destro o sinistro è necessario e sufficiente che *le* T_i *siano sostituzioni fra loro permutabili.* Ciò premesso si ha facilmente

$$S = \prod_{1}^{b} S_i(y_i) . C$$

ove

$$S_i = \int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i$$

e C è una sostituzione costante.

6. Le considerazioni precedenti conducono alle sostituzioni fra loro permutabili. Giova in un tale studio il teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè tutte le sostituzioni permutabili con una sostituzione data siano permutabili fra loro, è che i divisori elementari della sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro.

Una sostituzione che soddisfa alla precedente condizione la chiameremo una *sostituzione elementare*. Posto questo si hanno i teoremi:

Se la derivata sinistra (o destra) di una sostituzione abeliana sinistra (o destra) è permutabile con una sostituzione elementare costante, la sostituzione sarà abeliana apparente.

Fra le sostituzioni abeliane non vi sono che quelle apparenti le quali trasformino un gruppo di sostituzioni costanti (fra le quali si trova una sostituzione elementare) in un gruppo isomorfo formato da sostituzioni pure costanti.

Presa una sostituzione abeliana apparente si potranno sempre trovare due gruppi isomorfi di sostituzioni costanti trasformabili mediante essa l'uno nell'altro.

Se una sostituzione monodroma sopra una superficie di Riemann è permutabile con una sostituzione elementare costante, gli integrali destro e sinistro si otterranno mediante quadrature da funzioni monodrome.

Sul modo di eseguire i tagli normali sopra una superficie di Riemann mi riferirò all'opera di C. Neumann: *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale.*

Eseguiremo tre sistemi di tagli, i tagli a_i, b_i, c_i (*). Questi ultimi a differenza di quanto fa il Neumann, li faremo partire da un punto O della superficie di Riemann fino a giungere ai tagli a_i.

Finalmente eseguiremo un taglio l, il quale partendo da O attra-

(*) Neumann, opera citata, pag. 175 e seguenti.

versi tutti i punti singolari della sostituzione abeliana che si considera e non tolga la connessione alla superficie di Riemann già sezionata mediante i tagli a_i, b_i, c_i.

La sostituzione costante per cui devonsi moltiplicare i valori della sostituzione abeliana lungo l'orlo sinistro, per ottenere i valori sull'orlo destro, si chiamerà la costante del taglio. Ad ogni taglio a_i, corrispondono due costanti, ad ogni taglio b_i e c_i una sola costante. Queste costanti sono legate dalle relazioni:

Delle due sostituzioni costanti corrispondenti ad uno stesso taglio a_i *l'una è la trasformata dell'altra mediante la costante del taglio* b_i.

La sostituzione costante corrispondente ad un taglio c_i *è il prodotto della sostituzione costante corrispondente ad una porzione del taglio* a_i, *moltiplicata per la inversa della costante corrispondente all'altra porzione dello stesso taglio* a_i.

La costante corrispondente alla porzione di L *adiacente ad* O *è il prodotto delle costanti dei tagli* c_i.

Dai teoremi dimostrati nel § precedente si deduce finalmente:

Se le costanti dei tagli di una sostituzione abeliana saranno permutabili con una stessa sostituzione elementare, la sostituzione abeliana sarà apparente.

Pisa, 10 marzo 1888.

VOLTERRA.

CONCORSI A PREMI

R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli

Sulle curve piane del 4° ordine in relazione con l' interpretazione geometrica delle forme invariantive della forma ternaria biquadratica.

L'Accademia desidera un'esposizione analitica sistematica delle più notevoli proprietà delle curve piane del 4° ordine in relazione con l' interpretazione geometrica delle forme invariantive della forma ternaria biquadratica. La Memoria dovrebbe trattare: 1° delle polari della curva di 4° ordine; 2° delle sue tangenti doppie; 3° dei suoi flessi; 4° dei caratteri analitici invariantivi che distinguono le linee speciali del 4° ordine; 5° della geometria sopra una curva del 4° ordine.

Premio: *lire mille.* — Tempo utile: *31 marzo 1889.* — Lingue: *italiana, latina, francese.*

Inviare le Memorie (distinte con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata che conterrà il nome dell'Autore) al Segretario dell'Accademia.

Académie Royale Danoise des Sciences et des Lettres

I. — PRIX: *la Médaille d'or de l'Académie d'une valeur de 320 Couronnes.*

D'après des recherches, en particulier de MM. Weierstrass et Mittag Leffler, on peut développer en séries des fonctions d'une variable avec des zéros et des infinis donnés. Le problème inverse, où il s'agit de trouver les zéros et les infinis de séries données, n'a été résolu que dans des cas très particuliers. Pour provoquer des recherches dans ce sens, l'Académie propose sa médaille d'or comme prix pour la meilleure solution de la question suivante:

Étant données deux séries quelconques développées suivant des puissances de la variable, avec des coefficients rationnels, et convergente dans toute l'étendue du plan, on demande une méthode qui permette, par un nombre limité de calculs, de déterminer une troisième série développée suivant des puissances de la variable; convergente dans toute l'étendue du plan et dont les zéros soient les zéros communs des deux séries données. La méthode devra être éclaircie par des calculs effectués pour un ou plusieurs exemples.

II. — PRIX SCHOU (400 Couronnes).

Une étude des ouvrages de mathématiques arabes qui ont été traduits en latin ou en une langue européenne moderne, principalement de ceux qui traitent de la théorie et de la discussion des équations et de l'application des sections coniques à cette théorie, dans le but de déterminer le degré plus ou moins grand d'originalité dont les Arabes, dans leurs travaux sur ces matières, font preuve vis-à-vis de leurs devanciers grecs.

Délai fixé: *31 octobre 1889.* — Langues: *latin, français, anglais, allemand, suédois, danois.* — Adresser les Memoires (portant une devise et accompagnés d'un billet caheté muni de la même devise, et renfermant le nom, la profession et l'adresse de l'Auteur) au Secrétaire de l'Académie, M. *H.-G. Zeuthen*, professeur à l' Université de Copenhague.

ESTRATTI DAI VERBALI

ADUNANZA DEL 20 NOVEMBRE 1887

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza:

Il SEGRETARIO dà conto della corrispondenza relativa al cambio dei *Rendiconti*.

Il Circolo interessa il Presidente ad esprimere i ringraziamenti della Società al signor *Bertrand*, segretario perpetuo dell' Accademia delle Scienze di Parigi, per le parole gentili (di cui trovasi cenno nel *Journal des Débats* del dì 8 novembre 1887) dal medesimo pronunziate sulla nascente istituzione di Palermo, nel segnalare, fra le pubblicazioni ricevute in dono nell' adunanza del 7 novembre 1887, il tomo I dei *Rendiconti* del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (27 luglio 1887).

Fra le pubblicazioni periodiche e non periodiche pervenute durante le vacanze estive e di cui l'elenco sarà inserito, come di consueto, nella Biblioteca Matematica, il Segretario richiama l' attenzione dei Soci sui quattro volumi del *Traité des propriétés projectives* e delle *Applications d'Analyse et de Géométrie* di *J.-V. Poncelet* offerti graziosamente alla Società dalla Signora vedova del grande geometra francese. Il Circolo dà incarico al Presidente di esprimere i suoi ringraziamenti alla gentile donatrice.

III. — Ammissione di nuovi soci:

I signori: prof. comm. *Francesco Brioschi*, senatore del Regno (Milano) e prof. comm. *Luigi Cremona*, senatore del Regno (Roma) sono eletti, per acclamazione, *soci non residenti* del Circolo.

ADUNANZA DEL 4 DICEMBRE 1887

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza:

Il Presidente comunica una lettera del prof. *Brioschi*, il quale ringrazia la Società per la sua nomina, per acclamazione, a socio non residente del Circolo.

Il Segretario dà conto della corrispondenza relativa al cambio dei *Rendiconti*: Il capo del segretariato dell'Istituto di Francia annunzia che la Commissione amministrativa dell'Accademia delle Scienze ha accordato, su domanda del Circolo, i *Comptes Rendus*, a partire dal 1° gennajo 1888.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l'Adunanza precedente (20 novembre 1887).

Note e Memorie dei signori *Amodeo*, *Eneström*, *Guccia*, *Segre*, dal Ministero della P. I.; il n° 9-10 (t. XIV, 1887) del *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*; il fasc. 1 (vol. V) ottobre 1887 dei *Proceedings of the Canadian Institute;* il fasc. novembre-dicembre 1887 del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario.*

III. — Ammissione di nuovi soci:

Il prof. comm. *Enrico d'Ovidio* (Torino), su proposta dell'Ufficio di Presidenza, è eletto *socio non residente* del Circolo.

Dietro votazione a schede segrete, il sig. Ing. *Annibale Siragusa*, proposto nella precedente Adunanza dai soci Pepoli e D'Arone, è eletto *socio residente* del Circolo.

Proposti nella precedente Adunanza, dietro votazioni a schede segrete, sono eletti *soci non residenti* i signori:

	SOCI PROPONENTI
Berzolari Dott. *Luigi* (Vigevano). . . .	Guccia e Pepoli,
Brambilla Dott. *Alberto* (Bergamo). . .	Segre e Martinetti,
Ciollaro Ing. *Gustavo* (Napoli).	Del Re e Guccia,
Costa Dott. *Gregorio* (Napoli)	Del Re e Guccia,
Fouret Prof. *Giorgio* (Parigi).	Guccia e Albeggiani (M. L.)
Humbert Prof. *Giorgio* (Parigi).	Guccia e Del Pezzo,
Loria Prof. *Gino* (Genova).	Segre e Martinetti,

	SOCI PROPONENTI
Mollame Prof. *Vincenzo* (Catania) . . .	Gebbia e Martinetti,
Morera Prof. *Giacinto* (Genova)	Cerruti e Gebbia,
Peano Prof. *Giuseppe* (Torino).	Segre e Guccia,
Piuma Prof. *Carlo Maria* (Genova) . .	Cerruti e Guccia,
Salvatore-Dino Prof. *Nicola* (Roma) . .	Guccia e Cerruti,
Tonelli Prof. *Alberto* (Roma).	Cerruti e Guccia,
Volterra Prof. *Vito* (Pisa)	Cerruti e Guccia.

IV. — Memorie e Comunicazioni:

GIUDICE. — *Sopra la determinazione di funzioni d' una variabile definite per mezzo d'un'equazione con due variabili. Un'osservazione relativa alla costante che compare negli sviluppi in serie delle funzioni circolari* (pag. 28-36).

CONTI. — *Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia* (Nota II).

GUCCIA. — *Un teorema sulle curve singolari delle superficie algebriche.*

L'Autore comunica il seguente enunciato, analogo (tuttochè meno generale) a quello relativo ai punti singolari delle superficie algebriche (*Comptes Rendus*, t. CV, p. 741):

Sia [γ] *una singolarità* QUALUNQUE *che una superficie algebrica può possedere lungo una curva C. Supposto che* [γ] *appartenga successivamente ad una, due, tre (linearmente indipendenti) superficie algebriche F dell' ordine n, siano:*

a_0 *il numero delle condizioni semplici cui equivale per F la condizione di possedere, lungo la curva C, la singolarità* [γ];

a_1 *l'abbassamento prodotto da* [γ] *nel genere di F;*

a_2 *l'abbassamento prodotto da* [γ] *nel genere della curva ulteriore intersezione di due superficie F dotate, lungo la curva C, della singolarità* [γ];

a_3 *il numero delle intersezioni assorbite dalla curva C per tre superficie F dotate della singolarità* [γ].

Sarà allora, per n sufficientemente grande,

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0.$$

Pel caso particolare di una curva i-pla *ordinaria* C, d' ordine [illegible] e di rango r, la relazione è verificata dalle formole

$$a_0 = \tfrac{1}{6}\, i\,(i+1)\,[(3n - 2i + 5)\,m - \tfrac{1}{2}\,(2i+1)\,r],$$

$$a_1 = \tfrac{1}{6}\, i\,(i-1)\,[(3n - 2i - 5)\,m - \tfrac{1}{2}\,(2i-1)\,r],$$

$$a_2 = [i\,(2i-1)\,n + i^2(n-2)]\,m - i^2\,(2i-1)\,(m + \tfrac{1}{2}\,r),$$

$$a_3 = i^2\,[(3n - 2i)\,m - i\,r].$$

Per $i = 1$, introdotto il genere p della curva, si ha (per altra via):

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2m\,(n-2) - p + 1,\ a_3 = m\,(3n-4) - 2\,(p-1)$$

donde
$$a_0 = mn - p + 1,$$

nota formola che può sempre applicarsi ove l'ordine n della superficie superi un certo limite (cfr. Halphen: *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, p. 36).

ADUNANZA DEL 18 DICEMBRE 1887

PRESIDENZA A. PEPOLI

I. — Corrispondenza:

Il Segretario dà comunicazione di lettere dei signori professori *D'Ovidio*, *Volterra*, *Mollame*, *Ciollaro*, *Morera*, *Piuma*, *Loria* che ringraziano per la loro nomina a soci non residenti, e del prof. *F. Tirelli* (Catanzaro) che si dimette da socio del Circolo.

Il Segretario dà inoltre conto della corrispondenza relativa al cambio dei *Rendiconti*: Accordano il cambio delle proprie pubblicazioni coi Rendiconti del Circolo: 1° la Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), 2° la R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 3° il R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 4° la Società Matematica di Londra (quest'ultima a partire dalla data di fondazione del Circolo).

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (4 dicembre 1887).

Il tomo VI (serie III) delle *Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei* XL); il tomo VII, serie IV (sezione delle scienze fisiche e matematiche) delle *Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*; il vol. XVIII (n[i] 280-304) dei *Proceedings of the London Mathematical Society;* la *List of Members of the London Mathematical Society* (10 th November, 1887); il n° 1 (1887) della nuova serie della *Bibliotheca Mathematica* di *Eneström*; il n° 12 (dicembre 1887) del *Journal de Mathématiques élémentaires*; il n° 12 (dicembre 1887) del *Journal de Mathématiques spéciales;* Note e Memorie dei signori *Beltrami* e *Lipschitz*.

III. — Ammissione di nuovi Soci.

Il prof. comm. *Enrico Betti*, senatore del regno, è eletto, per acclamazione, *socio non residente* del Circolo.

Dietro votazioni a schede segrete, il sig. *Giovanni Platania*, proposto nella precedente Adunanza dai soci Mastricchi e Conti, è eletto *socio residente*, ed il dott. ing. *Giulio Vivanti*, proposto nella precedente Adunanza dai soci Loria e Guccia, è eletto *socio non residente*.

IV. — Memorie e Comunicazioni.

RETALI. — *Sulle forme binarie cubiche* (pag. 25-27).

GIUDICE.— *Sopra la determinazione di funzioni d'una variabile*, etc. (Continuaz. e fine; pag. 28-36).

D' ARONE. — *Sopra un teorema di Hermite.*

ADUNANZA DELL' 8 GENNAJO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza.

Il PRESIDENTE comunica una lettera del prof. *Betti*, il quale ringrazia la Società per la sua nomina, per acclamazione, a socio non residente del Circolo.

Il SEGRETARIO comunica una lettera del dott. *Vivanti* che ringrazia per la sua nomina a socio non residente del Circolo.

Il SEGRETARIO dà inoltre conto della corrispondenza relativa al

cambio dei *Rendiconti*: Il sig. *Darboux* accetta il cambio dei Rendiconti col *Bulletin des Sciences Mathématiques*, a partire dal 1 gennajo 1888.

Il Socio *Giudice* a nome e per incarico del prof. *E. Cesàro* presenta le dimissioni di quest'ultimo da socio del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l'Adunanza precedente (18 dicembre 1887):

Il n° 5 (ottobre 1887) del vol. III degli *Annals of Mathematics*; il n° 11 (t. XIV, 1887) del *Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique;* Note dei signori *de Jonquières* e *de Longchamps*.

III. — Ammissione di nuovi Soci.

Dietro votazioni a schede segrete il dott. *Vittorio Murer* (Spezia), proposto nella precedente Adunanza dai soci Albeggiani M. L. e Guccia, è eletto *socio non residente*.

Dietro votazione a schede segrete il dott. *Giovan Pietro Grimaldi*, proposto nella precedente Adunanza dai soci Macaluso ed Albeggiani M. L., è eletto *socio residente*.

IV. — Elezioni alle cariche sociali pel 1888.

Rimangono eletti i signori: prof. *G. Albeggiani*, presidente; professore *F. Caldarera*, vice presidente; dott. *G. B. Guccia* e prof. *M. L. Albeggiani*, segretari; ing. *S. Porcelli*, tesoriere; *G. Platania*, bibliotecario.

V. — Il Socio *Guccia* fa osservare che stante l'incremento e il rapido sviluppo della Società in questi ultimi tempi ed il continuo aumentarsi dei soci, non si debba ulteriormente procrastinare la compilazione dello Statuto definitivo della Società in sostituzione di quello provvisorio del 2 marzo 1884.

Dopo discussione il Circolo delibera di rimettere al Presidente la nomina di una Commissione di 5 Soci incaricata di redigere il disegno di detto Statuto da sottoporsi all'approvazione dell'Assemblea generale dei Soci in apposita adunanza straordinaria.

Il Presidente chiama a far parte di detta Commissione i Soci signori: *Amato-Pojero*, *Conti*, *Giudice*, *Guccia*, *Pepoli*.

VI. — Memorie e Comunicazioni.

MURER. — *Le serie di superficie in relazione cogli iperspazî, e in particolare quelle d'indice 3.*

L'Autore dopo avere osservato che le serie di superficie si pos-

sono considerare come linee negli iperspazî (il cui elemento generatore sia la superficie) giunge alle seguenti conclusioni :

Le serie d'indice 3 vanno distinte in due specie : serie immerse in un sistema lineare ∞^3 e serie immerse in un sistema lineare ∞^2 (rete). Le prime sono razionali. Le seconde nò (tranne quando contengano una superficie doppia), e la loro equazione si può scrivere in generale sotto la forma :

$$\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0,$$

essendo

$$\rho\lambda_0 = \mu^3, \ \rho\lambda_1 = \mu, \ \rho\lambda_2 = \sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}.$$

Per queste ultime l'inviluppante è di ordine $6n$ ed ha per punto multiplo secondo 6 i punti base della rete ; la linea cuspidale , d'ordine $9n^2$, si spezza in 9 caratteristiche; etc.

ADUNANZA DEL 22 GENNAJO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza.

Il Presidente comunica una lettera del prof. *Cremona*, il quale ringrazia per la sua nomina, per acclamazione, a socio non residente del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (8 gennajo 1888) :

I ni 1 e 2 (t. CVI, 1° semestre 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* di Parigi ; il fasc. 11-12 (nov.-dic. 1887) dei *Rendiconti della R. Accademia di Napoli*; la dispensa 1ª (t. VI, serie VI) degli *Atti del R. Istituto Veneto*; il n° 1 (gennajo 1888) del *Journal de Mathématiques élémentaires;* il n° 1 (gennajo 1888) del *Journal de Mathématiques spéciales;* il fasc. 2° (marzo-agosto 1887) degli *Atti del Collegio degl' Ingegneri ed Architetti in Palermo;* Note e Memorie dei signori *d'Ocagne* e *Vivanti*.

III. — Affari interni del Circolo.

IV. — Memorie e Comunicazioni.

DEL PEZZO annunzia di essere pervenuto al seguente teorema riguardante le superficie razionali dello spazio a tre dimensioni: *Ogni superficie non rigata dell'ordine m la cui sezione è del genere* $p \leqq m - 2$ *si può rappresentare sopra un piano.* Il quale teorema contiene come caso particolare il seguente: *Ogni superficie la cui sezione è del genere 1 o 2 è rappresentabile sopra un piano.*

La dimostrazione dipende dalla risoluzione del *problema inverso della projezione*, cioè: dato un ente geometrico in uno spazio a un certo numero di dimensioni, determinarne un altro immerso in uno spazio a un numero di dimensioni maggiore, che riproduca il dato per projezione.

ADUNANZA DEL 5 FEBBRAJO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza.

Il PRESIDENTE comunica una lettera ministeriale del 18 gennajo 1888, con cui S. E. il Ministro della P. I. accorda alla Società la somma di lire 300 a titolo d'incoraggiamento alla pubblicazione dei *Rendiconti.*

Il SEGRETARIO dà conto della corrispondenza relativa al cambio dei *Rendiconti*: La R. Accademia dei Lincei accetta il cambio dei propri *Rendiconti* con quelli del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (22 gennajo 1888).

Note e Memorie dei signori *Bianchi*, *Capelli*, *de Longchamps*; il vol. III (1° e 2° semestre 1887) dei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*; i n^{i} 3 e 4 (t. CVI, 1° sem. 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* di Parigi; il n° 2 (vol. X) dell' *American Journal of Mathematics*; il n° 305-307 (vol. XIX) dei *Proceedings of the London Mathematical Society*; il n° 7 (ultimo del tomo XV, 1887) del *Bulletin de la Société Mathématique de France;* il n° 2 (vol VIII) del *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*; il fasc. gennajo 1888 dei *Nouvelles Annales de Mathématiques*; il n° 4 (t. XI) del *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*.

III. — Ammissione di nuovi Soci.

Proposti nella precedente adunanza, dietro votazioni a schede segrete sono eletti *soci residenti* i signori:

	SOCI PROPONENTI
D'Angelo Ing. *Franc. Paolo*	Guccia e Pepoli,
Della Rocca Ing. Cav. *Gino*	Albeggiani G. e Guccia,
Gianforme Antonino	Pepoli e D'Arone,
Venturi Prof. *Adolfo*.	Albeggiani G. e Caldarera,

e *soci non residenti* i signori:

Breglia Ing. *Ernesto*	Del Re e Guccia,
Ruggiero Ing. *Pietro*	Del Re e Guccia.

IV. — Memorie e Comunicazioni.

DEL RE. — *Sur une question élémentaire de Géométrie* (p. 37-39).

ASSEMBLEA GENERALE DEI SOCI RESIDENTI

DEL DÌ 26 FEBBRAJO 1888

(In seconda convocazione)

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

L'Adunanza è aperta alle ore 3 p. m.

I. — Corrispondenza.

Il SEGRETARIO dà comunicazione di lettere dei signori *Breglia*, *Della Rocca*, *Grimaldi*, *Ruggiero*, *Venturi* che ringraziano per la loro nomina a soci del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (5 febbrajo 1888).

I n[i] 5, 6 e 7 (t. CVI, 1° sem. 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l' Académie des Sciences* di Parigi; i fasc. 2 e 3 (Vol IV, 1° sem. 1888) dei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei;* il t. XIV delle *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège;* il fasc. di febbrajo 1888 del *Journal de Mathématiques élémentaire ;* il fasc. di febbrajo 1888 del *Journal de Mathématiques spéciales.*

III. — Statuto della Società.

Discussione generale. Discussione di vari emendamenti che vengono respinti o ritirati dai proponenti. Si mette a' voti il progetto della

Commissione (*Guccia* presidente e relatore, *Amato-Pojero*, *Conti*, *Giudice*, *Pepoli*) con un emendamento del socio *Caldarera*, accettato dalla Commissione, che sopprime una parola dell'art. 44. Rimane approvato all'unanimità.

IX. — Memorie e Comunicazioni.

HALPHEN. — *Sur l'équation d'Euler* (Estratto di Lettera al dottore G. B. Guccia). (p. 40-44).

SEGRE. — *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni.* (p. 45-52).

Il Presidente toglie l'Adunanza alle ore 5 $^1/_2$ p. m.

ADUNANZA DEL 4 MARZO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI.

I. — Corrispondenza.

Il SEGRETARIO dà conto della corrispondenza relativa al cambio dei *Rendiconti*: Il R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere accetta il cambio dei propri *Rendiconti* con quelli del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l'Adunanza precedente (26 febbrajo 1888):

Note e Memorie dei signori *Del Re*, *Humbert*, *Ruffini*; due opere del prof. *Peano*: *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale* (Torino, Bocca, 1887) e *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di H. Grassmann* (Torino, Bocca, 1888); il n° 8 (t. CVI, 1° semestre 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* di Parigi; i fasc. 1, 2, 3 (vol. XXI, 1888) dei *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*.

III. — Ammissione di nuovi Soci.

I signori: prof. comm. *Eugenio Beltrami* (Pavia) e prof. commendatore *Felice Casorati* (Pavia) sono eletti, per acclamazione, *soci non residenti* del Circolo.

I signori: prof. *Eugenio Bertini* (Pavia) e prof. *Riccardo De Paolis* (Pisa) su proposta dell'Ufficio di Presidenza sono eletti *soci non residenti* del Circolo.

IV. — Memorie e Comunicazioni.

VIVANTI. — *Sulle equazioni a derivate parziali del primo ordine* (pag. 53-58).

ASSEMBLEA GENERALE DEI SOCI RESIDENTI

DEL DÌ 11 MARZO 1888

a norma dell'articolo transitorio dello Statuto della Società, discusso ed approvato dall'Assemblea Generale del dì 26 febbrajo 1888.

(In seconda convocazione)

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI.

L'Adunanza è aperta alle ore 3 p. m.

I. — Elezione dell' Ufficio di Presidenza pel biennio 1888, 1889.

Fatto lo spoglio delle schede (scrutatori i signori G. Bontade e F. Mastricchi) si ha il risultato seguente :

Votanti 25 — Maggioranza 13.

Presidente :	*Albeggiani Giuseppe*	eletto	con	voti	23.
Vice Presidente :	*Caldarera Francesco*	»	»	»	21.
Segretari :	*Guccia Giovanni Battista*. . .	»	»	»	23.
	Albeggiani Michele Luigi . . .	»	»	»	22.
Vice Segretari :	*D'Arone Giovanni*.	»	»	»	19.
	Pepoli Alessandro	»	»	»	19.
Tesoriere :	*Porcelli Salvatore*	»	»	»	23.
Bibliotecari :	*Platania Giovanni*.	»	»	»	21.
	Politi Giuseppe.	»	»	»	21.

Insediatosi l' Ufficio di Presidenza, il Segretario Albeggiani (M. L.) dà lettura del verbale dell'Adunanza precedente del 4 marzo 1888, che rimane approvato.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (4 marzo 1888).

Tre Note del prof. *S. Pincherle;* il n° 9 (tomo CVI , 1° semestre 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* di Parigi; il n° 12 (tomo XIV, 1887) del *Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique;* i fasc. gennajo e febbrajo 1888 del *Bulletin des Sciences Mathématiques;* il fasc. febbrajo 1888 dei *Nouvelles Anna-*

les de Mathématiques; il fasc. gennajo-febbrajo 1888 del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario.*

III. — Ammissione di nuovi Soci.

Il prof. comm. *Achille Sannia*, deputato al Parlamento (Napoli), su proposta dell' Ufficio di Presidenza è eletto *socio non residente* del Circolo.

Proposti nella precedente Adunanza, dietro votazioni a schede segrete sono eletti *soci non residenti* i signori :

	SOCI PROPONENTI
Arzelà Prof. *Cesare* (Bologna)	Albeggiani (M. L.) e Guccia,
Bassani Dott. *Anselmo* (Livorno).	Volterra e Guccia,
Chizzoni Prof. *Francesco* (Catania). . . .	Guccia e Giudice,
Lazzeri Dott. *Giulio* (Livorno).	Volterra e Guccia,
Pincherle Prof. *Salvatore* (Bologna) . . .	Albeggiani (M. L.) e Guccia,
Ruffini Prof. *Ferd. Paolo* (Bologna) . . .	Guccia e Gebbia,
Veronese Prof. *Giuseppe* (Padova)	D'Ovidio e Segre.

IV. — Elezione del Consiglio Direttivo pel triennio 1888, 1889, 1890.

Il Presidente richiama l'Art. 18 dello Statuto in cui è detto che ogni scheda deve indicare 20 nomi di soci, dei quali 5 residenti e 15 non residenti : Saranno considerate nulle le schede che non soddisfino a tale condizione.

Fatto lo spoglio delle schede (scrutatori i segretari M. L. Albeggiani e G. B. Guccia) si ha il risultato seguente :

Votanti 27 — Maggioranza 14.

RESIDENTI

Albeggiani Giuseppe.	eletto	con	voti	25.
Albeggiani Michele Luigi	»	»	»	24.
Caldarera Francesco	»	»	»	26.
Gebbia Michele	»	»	»	26.
Guccia Giovanni Battista	»	»	»	26.

Voti dispersi 8.

NON RESIDENTI

Battaglini Giuseppe (Napoli)	eletto con voti 27.
Beltrami Eugenio (Pavia)	» » » 27.
Bertini Eugenio (Pavia)	» » » 27.
Betti Enrico (Pisa)	» » » 27.
Brioschi Francesco (Milano)	» » » 27.
Casorati Felice (Pavia)	» » » 27.
Cerruti Valentino (Roma)	» » » 27.
Cremona Luigi (Roma)	» » » 27.
Del Pezzo Pasquale (Napoli)	» » » 27.
De Paolis Riccardo (Pisa)	» » » 27.
D'Ovidio Enrico (Torino)	» » » 27.
Jung Giuseppe (Milano)	» » » 27.
Pincherle Salvatore (Bologna)	» » » 27.
Segre Corrado (Torino)	» » » 27.
Volterra Vito (Pisa)	» » » 27.

Proclamato l'esito della votazione il Presidente toglie l'Adunanza alle ore 5, 45 p. m.

ADUNANZA DEL 25 MARZO 1888

PRESIDENZA G. B. GUCCIA

I. — Corrispondenza.

Il Presidente comunica una lettera del prof. *Beltrami*, il quale ringrazia la Società per la sua nomina, per acclamazione, a socio non residente del Circolo. Ringraziano pure per la loro nomina a soci non residenti i signori prof. *Arzelà*, *Bertini* (quest'ultimo anche a nome del prof. *Casorati*), *Pincherle*, *Sannia*.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l'Adunanza precedente (11 marzo 1888).

Note e Memorie dei signori *Bardelli* e *Forsyth*; i n[i] 10 e 11 (t. CVI, 1° sem. 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* di Parigi; il n° 1 (t. XVI, 1888) del *Bulletin de la Société Mathématique de France*; i fasc. 4 e 5 (1° sem. 1888) dei *Ren-*

diconti della R. Accademia dei Lincei; i fasc. 1 e 2 (1888) dei *Rendiconti della R. Accademia di Napoli;* il n° 3 (marzo 1888) del *Journal de Mathématiques élémentaires*; il n° 3 (marzo 1888) del *Journal de Mathématiques spéciales*; il n° 1 (tomo XV, 1888) del *Bulletin de l' Académie Royale de Belgique.*

III. — Memorie e Comunicazioni.

JORDAN. — *Sur la marche du cavalier* (p. 59-68).

VOLTERRA. — *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* (pagine 69-75).

ADUNANZA DELL' 8 APRILE 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Il PRESIDENTE comunica al Circolo i ringraziamenti dei soci signori: *Albeggiani G.*, *Albeggiani M. L.*, *Caldarera, Gebbia, Guccia* (residenti); *Battaglini, Beltrami, Bertini, Betti, Brioschi, Casorati, Cerruti, Cremona, Del Pezzo, De Paolis, D' Ovidio, Jung, Pincherle, Segre, Volterra* (non residenti), per la loro nomina a componenti il *Consiglio Direttivo* pel triennio 1888-89-90.

Lo stesso PRESIDENTE annunzia che il *Consiglio*, entrato in carica, ha proceduto, a' sensi dell'Art. 20 dello Statuto, alla nomina del suo delegato per dirigere la pubblicazione dei *Rendiconti* e che è rimasto eletto a tal carica il dott. *G. B. Guccia* con 18 voti sopra 20 votanti. Il *Consiglio* ha inoltre deferito al delegato suddetto la compilazione di uno schema di regolamento interno, di cui all' art. 16 dello Statuto, da essere sottoposto all'approvazione del Consiglio medesimo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (25 marzo 1888).

Note e Memorie dei signori *Brill, Castelnuovo, Giudice, Lazzeri, Neuberg;* i n[i] 12 e 13 (t. CVI, 1° sem. 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* di Parigi; il fasc. V (t. XXI) dei *Rendiconti del R. Istituto Lombardo;* il fasc. aprile 1888 del *Bulletin des Sciences Mathématiques;* il fasc. 3° (sett.-dic. 1887) degli *Atti del Collegio degli Ingegneri ed architetti di Palermo;* il vol. XVIII (1887) del *Giornale di Scienze Naturali ed Economiche.*

III. — Ammissione di nuovi Soci.

Dietro votazioni a schede segrete: il prof. comm. *Emanuele Paternò*, proposto nella precedente Adunanza dai soci G. Albeggiani e Guccia, e l'ing. *Giuseppe Tripiciano*, proposto nella precedente Adunanza dai soci Gebbia e M. L. Albeggiani, sono eletti *soci residenti*.

Dietro votazione a schede segrete il prof. *Alexis Starkoff* (Odessa), proposto nella precedente Adunanza dai soci G. Albeggiani e Guccia, è eletto *socio non residente*.

IV. — Memorie e Comunicazioni.

PEPOLI. — *Sopra alcuni enti geometrici che s' incontrano nello studio delle trasformazioni univoche e multiple nello spazio a tre dimensioni.*

GIUDICE. — *Esempi semplici di funzioni continue senza derivata in un numero finito od infinito di punti.*

D'ARONE. — *Sopra due teoremi di Picard.*

ADUNANZA DEL 22 APRILE 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza.

Il PRESIDENTE comunica una lettera del prof. comm. *Emanuele Paternò*, rettore della R. Università di Palermo, il quale ringrazia per la sua nomina a socio residente del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l' Adunanza precedente (8 aprile 1888).

Note e Memorie dei signori: *Cantone (M.), D'Arone, Grimaldi, Mannheim, Masoni, Volterra, Zeuthen.*

I n^{i}. 14 e 15 (1° sem. 1888, t. CVI) dei *Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences* di Parigi; il fasc. 6 (vol. IV, 1° semestre 1888) dei *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei;* il n° 2 (t. XV) del *Bulletin de l' Académie Royale de Belgique*; il fasc. 6 (vol. XXI, 1888) dei *Rendiconti del R. Istit. Lombardo;* il n° 1 (t. XII) del *Bulletin de la Société Philomatique de Paris;* il n° 6 (vol. III) degli *Annals of Mathematics*; il n° 4 (avril 1888) del *Journal de Mathématiques spéciales;* il n° 4 (avril 1888) del *Journal de Mathématiques élémentaires*;

i fascicoli 1871-72, 1872-73, 1873-74, 1874-75, 1877-78, 1881-82 1883-84, 1885-86, 1887-88 dei *Jahres-Bericht über die Ober-Realschu in Kiel* (Director : Dr. *Ernst Meissel*).

III. — Memorie e Comunicazioni.

DAINELLI. — *Moto d'un punto materiale libero sollecitato da un forza diretta a un centro che si muove uniformemente in linea retta.*

IV. — Proposta di quesiti.

CERRUTI. — « *Trovare sotto quali condizioni per il moto di u* « *punto libero nel piano esista un integrale della forma :*

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C=h,$$

« *e per il moto di un punto libero nello spazio un integrale della forma*

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}+D=h,$$

« *dove h è una costante arbitraria ed A, B, C, D si suppongano co* « *tenere esplicitamente tanto le coordinate quanto il tempo* ».

ADUNANZA DEL 13 MAGGIO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI.

I. — Corrispondenza.

Il SEGRETARIO comunica lettere dei signori *Starkoff* e *Lazzeri* ch ringraziano per la loro ammissione a soci non residenti del Circolo.

Il SEGRETARIO dà inoltre conto della corrispondenza relativa : cambio dei Rendiconti : Il dott. *Max Henoch* per i *Jahrbuch über d Fortschritte der Mathematik* ed il prof. *P. Mansion* per la *Mathesis* a cettano il cambio coi *Rendiconti* del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni ricevute dopo l'Adunanza prec dente (22 aprile 1888).

Note e Memorie dei signori : *Brambilla*, *Chizzoni*, *Hossfeld*, - *Paige*, *Murer*, *Pincherle*, *Schlaefli*, *Walther Dyck*.

I nⁱ 16, 17, 18 (t. CVI, 1° sem. 1888) dei *Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences* di Parigi; il fasc. 7 (vol. IV, 1° semestre 1888) dei *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei;* il n° 3 (t. XV, 1888) del *Bulletin de l'Acad. Royale de Belgique;* il vol. XVII (1887) dei *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München;* il fasc. 7 (vol. XXI, 1888) dei *Rendiconti del R. Istituto Lombardo;* le dispense 2ª, 3ª, 4ª (tomo VI, 1887-88) degli *Atti del R. Istituto Veneto ;* il fasc. 3 (marzo 1888) del vol. II dei *Rendiconti della R. Acc. delle Scienze di Napoli;* il numero 311-313 (vol. XIX) dei *Proceedings of the London Mathematical Society*; i nⁱ 2 e 3 (t. XVI, 1888) del *Bulletin de la Société Mathématique de France*; i nⁱ 1 e 2 (t. XI) degli *Acta Mathematica*; il fascicolo marzo 1888 delle *Nouvelles Annales de Mathématiques*; i fascicoli 1 e 2 (vol. XVII, anno 1885) dei *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik;* il n° 18 (5 maggio 1888, t. XLI) della *Revue Scientifique* (directeur: *M. Charles Richet*); i fascicoli gennajo-aprile 1888 della *Mathesis;* il n° 3 (vol. VIII, 1887) del *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*; il fasc. 2 (marzo-aprile 1888; anno III) del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*; il n° 1 (nuova serie, 1888) della *Bibliotheca Mathematica* di *Eneström.*

III. — Ammissione di nuovi Soci.

Il sig. *Gösta Mittag-Leffler*, professore nell'Università di Stoccolma, è eletto, per acclamazione, *socio non residente* del Circolo.

Dietro votazioni a schede segrete sono eletti *soci non residenti* i signori:

	Soci proponenti
Le Paige Prof. *Costantino* (Liegi)	Guccia e Gebbia,
Marcolongo Dott. *Roberto* (Roma)	Cerruti e Guccia,
Montesano Dott. *Domenico* (Roma)	Cerruti e Guccia,
Panizza Dott. *Francesco* (Alessandria)	Loria e Martinetti,
Schlegel Dott. *Vittorio* (Hagen i./w.)	Guccia e Albeggiani (M. L.).

IV. — Memorie e Comunicazioni.

STARKOFF. — *Sur un problème du calcul des variations.*

LAZZERI. — *Sopra certi sistemi di linee e di superficie.*

MURER. — *Generazione della superficie d'ordine n con retta (n—2)-pla.*

PEANO. — *Osservazioni sopra una Nota del prof. F. Giudice* (*)

« Il prof. F. Giudice crede che per dimostrare che *se una funzione soddisfa alla condizione* $\psi(x)\,\psi(y) = \psi(x+y)$, *essa è della forma* e^{hx}, non basti ammettere la continuità della funzione, come asseriva Cauchy, ma occorra l'esistenza della derivata.

« Ora si può dimostrare, seguendo appunto Cauchy, che la condizione della continuità della funzione è sufficiente, poichè due funzioni continue, eguali per tutti i valori razionali della variabile, sono eguali per tutti i valori della variabile. (Vedasi p. e. il mio *Calcolo differenziale* ecc. pag. 28).

« Anzi la condizione della continuità non è nemmeno necessaria. Si può provare la proposizione ammettendo semplicemente che esista un intervallo finito tale che il limite superiore dei valori assoluti di $\psi(x)$ in questo intervallo sia finito. Vedasi Darboux, *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective* (*Math. Annalen*, vol. XVII, pag. 55).

« Le stesse osservazioni si possono fare per le funzioni che soddisfano alle condizioni segnate nella Nota citata colle lettere (*a*) ed (*e*).

« Riguardo alle condizioni (*c*) e (*d*), esse *non* sono evidentemente soddisfatte da arc sen x e arc tang x, ove questi archi siano compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, potendo il valore del primo membro uscire da questo intervallo, in cui è necessariamente compreso il valore del secondo ».

GIUDICE. — *Risposta a due osservazioni del prof. G. Peano sulla mia Nota letta a questo Circolo nelle Adunanze del 4 e 18 dicembre 1887.*

« Rispondo nel n° 1 alla prima osservazione, nel n° 2 alla seconda.

1. « È noto che i valori di due funzioni sono eguali sempre se lo sono pei valori razionali della variabile (**) ed è pur noto qualche cosa di più generale (***), ove dicendo che due funzioni hanno egual valore in un punto s' intenda che ogni numero aritmetico dato arbitrariamente piccolo è maggiore della differenza dei valori di dette funzioni in quel

---

(*) Questi *Rendiconti*, t. II, pag. 28-36.

(**) Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, § 44.

(***) Dini, l. c. § 43.

punto. Può dunque riconoscere che non era punto necessario che mi ricordasse il suo pregevole *Calcolo*: citando Cauchy poteva ben ritenere superflua la citazione dei seguaci.

« Veniamo ora all' osservazione. Dalla mia Nota non risulta l' appunto che mi vien fatto; sibbene si può desumere ch'io ponga in dubbio se veramente due funzioni continue eguali pei valori razionali della variabile lo siano pure per quelli irrazionali. Ed in vero io avrei desiderato domandare se non si debba far distinzione tra funzioni che hanno lo stesso valore, nel senso precedentemente dichiarato, e funzioni eguali, funzioni cioè che coincidono in tutte le proprietà si generali che particolari, funzioni quindi che hanno lo stesso valore, la stessa derivata se la ammettono, ecc. Non voglio affermare che la risposta a questa domanda serpeggi nei recenti trattati d'Analisi, ma certamente vi si trova qualche cosa di affine. Mansion, p. es., dopo aver detto (*): « Ce principe supprime toute différence entre les valeurs limites et les « valeurs effectives des variables, dans le calcul des égalités », soggiunge (**): « Cette opération ne suppose pas que la limite d'une variable « en soit une valeur effective ». Ancora : Se due funzioni hanno eguali valore e derivata nei punti d'un gruppo infinito, si può affermare che le medesime hanno egual valore nei punti dei gruppi derivati (***) ; ma non so se si possa affermare altrettanto per le derivate di esse funzioni (****).

2. « Avendo detto che deve essere $\xi(x)=h.\text{arc sen}\,x$, dove arc sen x indica l' arco di seno x compreso fra un quadrante negativo ed uno positivo, va da sè che si debbano sommare soltanto valori particolari di $\xi(x)$ i quali diano somma che non esca dall' intervallo di variabilità, dovendo anche tal somma essere un valore della stessa $\xi(x)$; tutto al più lo si potrebbe rimarcare per esser chiari ad esuberanza. »

(*) *Résumé du Cours d' Analise infinitésimale de l' Université de Gand*, loco citato, § 23.

(**) l. c. § 27.

(***) Dini, l. c. § 43.

(****) Dini, l. c. § 72, 5°.

ADUNANZA DEL 27 MAGGIO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza.

Il PRESIDENTE annunzia che il Rettore della R. Università di Bologna ha invitato il Circolo a partecipare alle solenni feste per l' VIII centenario della fondazione dello Studio bolognese (11, 12 e 13 giugno) Per rispondere a tale invito l'*Ufficio di Presidenza*, nella tornata del 20 corrente mese, ha deliberato un voto di ringraziamento, a nom della Società, al Rettore-Presidente ed al Comitato esecutivo dell'Uni versità di Bologna, ed ha nominato i soci prof. *Pincherle* e dott. *Guccia* quali rappresentanti del Circolo alle prossime feste della Scienza italian

Il SEGRETARIO comunica una lettera del prof. *Mittag-Leffler*, ch ringrazia la Società per la sua nomina, per acclamazione, a socio no residente del Circolo. Ringraziano parimenti per la loro nomina a so non residenti i signori *Marcolongo*, *Montesano*, *Panizza*.

Accettano il cambio delle proprie pubblicazioni coi *Rendiconti d Circolo*: 1° la *K. B. Akademie der Wissenschaften zu München;* 2° l *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften;* 3° l'*Association françai pour l'Avanc. des sciences;* 4° il sig. *Mittag-Leffler* (« *Acta Mathematica* »)

II.—Presentazione di pubblicazioni ric. d. l'Adun. preced. (13 mag. 1888)

Note e Memorie dei signori: *Bertini, Conti, Favaro, Grimaldi, Gucci de Jonquières, Montesano, Morera, Pizzetti, Segre, Schoute;* il fasc. 8 (vol. IV 1° sem. 1888) dei *Rend. della R. Acc. dei Lincei;* i n.i 19 e 20 (t. CVI) d *Comptes Rendus* di Parigi; il fasc. 8 (vol. XXI, 1888) dei *Rend. del R. Ist Lombardo;* i vol.i XVI e XVII; dei *Proceedings of the London Math. Societ* il n° maggio 1888 del *Bulletin des Sciences Mathématiques;* i fasc.i 1 e (anno XXXIII, 1888) dei *Zeitschrift für Math. u. Physik;* i n.i 19 e 20 (188 della *Revue Scientifique;* il n° 5 (1888) del *Journ. de Math. élémentaire spéciales;* il n° maggio 1888 (t. VIII) della *Mathesis*.

III. — Ammissione di nuovi Soci.

Dietro votazione a schede segrete il prof. cav. *G. Z. Reggio*, pro posto dai soci Pincherle e M. L. Albeggiani, è eletto *socio non resident*

IV. — Memorie e Comunicazioni.

DE JONQUIÈRES. — *Construction géométrique de courbes unicursa les, notamment de celle du 5ème ordre douée de six points doubles.*

G.-B. G. M.-L. A.

SULLE CONGRUENZE GENERATE

DA

UNA COPPIA DI PIANI IN CORRISPONDENZA DOPPIA

Nota IIª (*) del dott. **I. Conti**, a Palermo.

Adunanza del 4 dicembre 1887.

Nella Nota precedente abbiamo dimostrato le proposizioni più importanti sulle congruenze $[C]$ generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia e le abbiamo applicate al caso particolare della corrispondenza doppia quadratica.

Nella presente Nota studieremo due particolari $[C]$, per le quali le trasformazioni doppie che le individuano e le involuzioni a queste congiunte si ottengono da semplici costruzioni geometriche.

I.

1. Siano: in un piano P un fascio di raggi o riferito projettivamente ad un fascio di coniche $F^{(2)} \equiv o'_1\, o'_2\, o'_3\, o'_4$ situato in un secondo piano P', e σ una retta arbitraria posta fuori dei piani medesimi.

(*) La presente Nota, come la precedente (questi *Rendiconti* t. I, p. 230-240), è estratta dalla tesi di Laurea presentata alla Facoltà Matematica di Pisa addì 2 aprile 1887.

Le rette che si appoggiano a due elementi corrispondenti delle due forme ed alla σ costituiscono un sistema ∞^2.

Per un punto qualunque x di P passano due rette del sistema, per un punto y' di P' una sola.

Assumendo come corrispondenti nei due piani due punti x, y' situati sopra una retta del sistema, possiamo stabilire che *il sistema in questione costruisce fra i piani P e P' una trasformazione doppia di cui il primo è il piano doppio il secondo il semplice.*

Chiamiamo o_1 il punto in cui σ interseca P, o'_5 quello in cui sega P', o'_6, o'_7 le intersezioni del piano projettante da o la σ colla conica di $F^{(2)}$ corrispondente al raggio $(o o_1)_1$. È facile vedere che alle rette di P corrispondono le Φ' di una rete $\Phi'_3 \equiv o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_5 o'_6 o'_7$ di cubiche ellittiche.

La trasformazione doppia $((PP'))_2$ (*) è la particolare (**) del terzo ordine e genere uno che si ottiene collocando sei dei punti fondamentali sopra una conica ed allineando due di essi col settimo.

2. La coppia variabile di punti congiunti comune a due Φ' arbitrarie (giusta la disposizione dei punti base della rete) deve trovarsi su di una retta di o'_5.

Ciò può facilmente dedursi da facili considerazioni sulla costruzione geometrica suesposta.

La trasformazione congiunta $((P'))$ è quindi di classe zero (***) perciò del tipo di quelle di Jonquières (****).

È manifesta la costruzione geometrica della $((P'))$; il conjugato di un punto qualunque y' è quello in cui la conica $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 y'_1)_2$ sega ulteriormente la $(o'_5 y'_1)_1$.

(*) Seguendo le notazioni del sig. Jung (« *Le trasformazioni piane multiple* » *Rend. Acc. Lincei* 21 nov. 1886) denoteremo con $((PP'))_2$ la trasformazione doppia individuata da P e P' e con $((P'))$ l'involuzione ad essa congiunta.

(**) *Particolare* nel senso definito dal De Paolis: « *Le trasformazioni piane doppie* » *Mem. Acc. Lincei*, I_3, § 1, n° 19.

(***) Per la denominazione di classe cfr. Caporali: « *Sulle trasformazioni piane univoche involutorie* » *Rend. Acc. Napoli*, 1879, fasc. 9 — n° 2.

(****) Bertini: « *Sopra una classe di trasformazioni involutorie* » *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. 7, pag. 11, n° 9.

Da ciò discende, che $o'_1 o'_2 o'_3 o'_4$ sono fondamentali semplici per la involuzione, ad essi sono conjugate le rette che li projettano da o'_5, le coniche di $F^{(2)}$ sono curve unite, perciò, se indichiamo con N l'ordine di quest'involuzione, $N = 3$.

La rete omaloidica relativa alla $((P'))$ è la $\Psi'_3 \equiv o'^2_5 o'_1 o'_2 o'_3 o'_4$. Epperciò:

La curva punteggiata unita di $((P'))$, doppia per la $((PP'))_2$, (*luogo dei punti in cui una conica di* $F^{(2)}$ *tocca una retta di* o'_5) *è del* 3° *ordine ellittica, passa semplicemente per* $o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_5$ *e tocca nei primi quattro punti le projettanti i medesimi dal quinto.* (*)

È utile osservare che:

I punti o'_1, o'_2, o'_3, o'_4, o'_5 *sono fondamentali semplici di* 1ª *specie per la* $((PP'))_2$ *ed* o'_6, o'_7 *di seconda.*

Non vi sono in P' *punti doppi.*

3. *In* P *abbiamo un sistema* ∞^2 *di* $\Phi_3 \equiv o_1^2 o$ *razionali e del* 3° *ordine.*

La curva limite è una curva $\Omega_4 \equiv o^2 o_1^2$ *del quart' ordine e genere uno, a cui sono tritangenti le* Φ_3.

Dalla costruzione geometrica suesposta resulta poi evidente che:

Ad o'_1, o'_2, o'_3, o'_4 *corrispondono in* P *rette tangenti alla* Ω_4 *fuori del punto* o_1 *per cui passano; ad entrambi i punti* o'_6, o'_7, *la* $(oo_1)_1$.

Pei punti fondamentali di P abbiamo: ad o corrisponde la $(o'_5 o'_6 o'_7)_1$ ad o_1 la conica $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_6 o'_7)_2$, entrambe curve congiunte a loro stesse; quindi o ed o_1 sono fondamentali di 3ª specie.

Osserviamo infine che i punti u'_1, u'_2, u'_3 sulla $G \equiv PP'$ in cui una conica di $F^{(2)}$ sega il raggio corrispondente di o sono i soli punti uniti della $((PP'))_2$.

4. È utile vedere come, partendo dalle proprietà della trasformazione $((PP'))_2$, si possa risalire alla costruzione geometrica da noi esposta in principio.

Basta a ciò osservare che alle rette di P passanti pel punto fondamentale doppio o_1 corrispondono in P' rispettivamente (esclusa la

(*) Bertini, l. c.

conica fondamentale) rette del fascio o'_5 che viene ad essere così ri rito projettivamente al primo; analogamente (prescindendo dalla re fondamentale) alle rette del fascio o corrispondono rispettivamente (niche del fascio $F^{(2)} \equiv o'_1 o'_2 o'_3 o'_4$ riferito projettivamente al primo.

Perciò le due rette $(xy'_1)_1$, $(xy'_2)_1$ che uniscono un punto arbit rio x di P coi corrispondenti y'_1, y'_2 in P' giacciono nel piano che p jetta da o la retta $\sigma \equiv o'_5 o_1$ e costituiscono la coppia di rette che int secano la σ e si appoggiano ai due elementi corrispondenti $(ox)_1$, $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 y'_1 y'_2)_2$ delle due forme projettive o ed $F^{(2)}$.

5. Il sistema di rette da noi definito è la congruenza $[C]$ ger rata dalla $((PP'))_2$.

Le proprietà di questa congruenza potrebbero dedursi consider dola come intersezione del complesso di 3° grado formato dalle re appoggiantesi agli elementi corrispondenti dei fasci projettivi o ed F col complesso lineare singolare costituito dalle rette appoggiantesi a σ; noi però le dedurremo applicando a questo caso i teoremi gene sulle $[C]$. (*)

La presenza dei punti uniti u'_1, u'_2, u'_3 dà luogo però alle modificazi riassunte nel § 17 del menzionato lavoro.

Deduciamo perciò:

La $[C]$ *è di 3° ordine e 3ª classe.*

La $G \equiv PP'$ *non appartiene alla congruenza.*

In P *la* Φ_G *passa semplicemente pei punti* u'_1, u'_2, u'_3*; la prima cu della congruenza si riduce al fascio di raggi* Γ_1 *che ha centro in* o.

In P' *la* Φ'_G *passa del pari semplicemente per* u'_1, u'_2, u'_3*, la 2ª cu della congruenza è costituita dai raggi di* o'_5 *contati due volte.*

Dicendo *cono della congruenza* un cono generato da rette de medesima, possiamo concludere che sono coni della $[C]$:

Il cono quadrico projettante da o *la* $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_6 o'_7)_2$.

I tre fasci di raggi projettanti da o, o'_6, o'_7 *rispettivamente* $(o'_6 o'_7)_1$, $(o o_1)_1$, $(o o_1)_1$ *situati nel piano* $\Pi \equiv o o_1 o'_5 o'_6 o'_7$.

I fasci di raggi projettanti dai punti fondamentali o'_1, o'_2, o'_3, o'_5 *le rette corrispondenti.*

(*) Cfr. Nota precedente: questi *Rendiconti* t. I, pag. 230.

I tre fasci di raggi projettanti da u'_1, u'_2, u'_3 i punti della σ.

Da semplici considerazioni geometriche risulta poi:

La σ è singolare per la [C], ogni punto di questa retta è vertice di un cono cubico ellittico della congruenza.

I piani di σ sono singolari per la [C], su ciascuno di essi le rette di questa inviluppano curve della 3^a classe e del 4^o ordine di cui le tracce sui piani P, P' sono rispettivamente tangenti semplice e doppia.

Oltre i punti suindicati la [C] non ha altri punti singolari.

Oltre i piani di σ, i piani generatori e i piani dei fasci di raggi della congruenza, la [C] non ha altri piani singolari.

6. Denotando con F la superficie focale della congruenza in questione possiamo enunciare:

La F è del 10^o ordine e della 10^a classe.

Il piano P la tocca lungo la Φ_G (del 3^o ordine e 4^a classe) e la sega ulteriormente secondo la Ω_4 (del 4^o ordine).

Il piano P' la tocca lungo la Φ'_G (del 3^o ordine e 6^a classe) e la sega ulteriormente secondo un luogo del 4^o ordine spezzantesi nelle quattro rette che da o'_5 projettano i punti comuni alla G e alla Ω_4.

I punti u'_1, u'_2, u'_3 sono doppi conici per la F.

I raggi di [C] sono bitangenti di F.

Considerando l'intersezione della F con uno dei piani di σ, spezzantesi nel luogo del 4^o ordine in esso contenuto (inviluppato da rette di [C]) e nella σ, possiamo stabilire che *la σ è sestupla per la F.*

II.

7. Siano: in un piano P un fascio di raggi o, in un secondo piano P' un fascio di coniche $F^{(2)}$ ed S_n una superficie rigata razionale d'ordine n le cui generatrici siano riferite projettivamente agli elementi dei due fasci.

Le rette che si appoggiano alle terne di elementi corrispondenti nelle tre forme costituiscono un sistema ∞^2.

Analogamente a ciò che dianzi abbiamo detto possiamo enunciare:

Il sistema in questione costruisce fra i piani P e P' una corrispondenza doppia di cui P è il piano doppio e P' il semplice.

Noi studieremo il caso particolare in cui la S_n è un fascio di raggi $o^{(1)}$ situato in un piano $P^{(1)}$ distinto da P e P'.

È utile però il notare che allora il sistema di rette stabilisce fra P' e $P^{(1)}$ una corrispondenza doppia $((P^{(1)}P'))_2$ identica alla $((PP'))_2$.

Premettiamo le seguenti indicazioni:

Siano: G, G', G'_1 le mutue intersezioni dei tre piani suddetti cioè: $G \equiv PP^{(1)}$, $G' \equiv PP'$, $G'_1 \equiv P^{(1)}P'$; o'_5, o'_6 ed o'_7, o'_8 le coppie di punti in cui i due piani contenenti raggi corrispondenti di o ed $o^{(1)}$ tagliano rispettivamente le coniche corrispondenti di $F^{(2)}$; o'_9, o'_{10}, o'_{11} i punti di G'_1 in cui una conica di $F^{(2)}$ sega il raggio corrispondente di $o^{(1)}$; u'_1, u'_2, u'_3 i punti di G' in cui un raggio di o incontra la conica corrispondente di $F^{(2)}$:

Cercando il luogo di P' corrispondente ad una retta arbitraria di P, si trova agevolmente una curva del 5° ordine e genere due:

$$\Phi'_5 \equiv o'^2_1 o'^2_2 o'^2_3 o'^2_4 o'_5 o'_6 o'_7 o'_8 o'_9 o'_{10} o'_{11}.$$

La rete delle curve iperellittiche di P' è quindi completamente individuata dal passaggio per i punti base.

È importante notare la giacitura dei punti suddetti; dalle indicazioni resultano le seguenti disposizioni:

$$(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_5 o'_6)_2, \ (o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_7 o'_8)_2, \ (o'_9 o'_{10} o'_{11})_1 .$$

Osservando il luogo corrispondente in P' al centro o si trova essere una cubica ellittica passante per gli undici punti medesimi.

Epperò:

La $((PP'))_2$ è una particolare trasformazione di 5° ordine e genere due.

Notiamo poi che:

I punti u'_1, u'_2, u'_3 sono i soli punti uniti della medesima.

8. La costruzione geometrica esposta in principio ci fa subito avere la costruzione dell'involuzione $((P'))$.

Il fascio $o^{(1)}$ interseca la G' secondo una punteggiata projettiva al fascio di coniche $F^{(2)}$.

Per un punto qualunque y'_1 di P' passa la conica $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 y'_1)_2$ cui corrisponde un punto g' sulla G', il punto y'_2 conjugato ad y'_1 è l'ulteriore punto d'intersezione di $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 y'_1)_2$ colla $(g' y'_1)_1$.

Da ciò è facile desumere che o'_9, o'_{10}, o'_{11} sono fondamentali doppi di P', ad essi sono conjugate rispettivamente le coniche $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_9)_2$, $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_{10})_2$, $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_{11})_2$; coll'osservare che G'_1 è per essa curva unita si desume che l'ordine di quest'involuzione è sette.

È manifesto poi che essa è di prima classe, ed i punti o'_1, o'_2, o'_3, o'_4 sono suoi punti fondamentali tripli.

La $((P'))$ è la *trasformazione involutoria di 7° ordine e 1ª classe con quattro punti tripli e tre doppi.*

Essa fu studiata dal sig. Bertini (*) e si ottiene dalla generale di prima classe e ottavo ordine con sette punti tripli, allineando tre di questi punti che diventano doppi per la nuova involuzione.

Quest'involuzione si costruisce col metodo generale del Geiser (**) mediante la rete di cubiche unite

$$K'_3 \equiv o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_9 o'_{10} o'_{11}$$

relative ai vari punti del piano P' (isologiche di questi punti) e più semplicemente col metodo del sig. Bertini [mediante un fascio arbitrario di K'_3 ed il fascio di coniche unite $F^{(2)}$].

Dalle proprietà di quest'involuzione si può facilmente dedurre la costruzione geometrica da noi esposta [mediante il fascio $F^{(2)} \equiv o'_1 o'_2 o'_3 o'_4$ e la punteggiata projettiva $(o'_9 o'_{10} o'_{11})_1$].

Basta a ciò osservare che dall'essere o'_1, o'_2, o'_3, o'_4 punti fondamentali tripli di quest'involuzione (di 7° ordine e 1ª classe) e o'_9, o'_{10}, o'_{11} doppi, consegue che le coniche di $F^{(2)} \equiv o'_1 o'_2 o'_3 o'_4$ e $G'_1 \equiv o'_9 o'_{10} o'_{11}$ sono curve unite.

Considerando l'involuzione sopra una di queste coniche, il suo punto centrale (***) deve essere situato sulla G'_1, che viene così ad essere riferita projettivamente al fascio $F^{(2)}$.

Il conjugato y'_2 di un punto arbitrario y'_1 è l'ulteriore intersezione

(*) Cfr. Bertini « *Sopra alcune involuzioni piane* » *Rend. Istit. Lombardo*, Serie II, Vol. XVI, pag. 199, n° 30.

(**) Geiser: « *Ueber zwei geometrische Probleme* » *Journal von Crelle*, Bd. 67, s. 68.

Cfr. pure Milinowski, *Crelle*, Bd. 77, s. 263.

(***) Reye: *Géométrie de position*, traduction par O. Chemin, IIe partie pag. 156.

della conica $(y'_1 o'_1 o'_2 o'_3 o'_4)_2$ colla congiungente y'_1 al punto di G'_1 corrispondente a questa curva.

La curva punteggiata unita della $((P'))$ è, com'è noto (*), una $\Omega'_5 \equiv o_1'^2 o_2'^2 o_3'^2 o_4'^2 o_9'^2 o_{10}'^2 o_{11}'^2$ ed ha l'inviluppo delle direzioni principali di classe $c = 4$.

Da una formula conosciuta (**) si desume il numero $U = 0$ dei punti uniti isolati.

Epperciò possiamo dire che:

La $((PP'))_2$ ha la curva doppia di quint'ordine e genere due e non ha punti doppi nel piano semplice.

9. Nel piano P abbiamo notata l'esistenza del punto fondamentale triplo o, cui corrisponde in P' la cubica ellittica congiunta a se stessa $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_5 o'_6 o'_7 o'_8 o'_9 o'_{10} o'_{11})_3$.

Chiamando o_1 e o_2 i punti della $G \equiv PP^{(1)}$ in cui un raggio di o sega il corrispondente di $o^{(1)}$, si può subito osservare che ad o_1 e o_2 corrispondono rispettivamente le coniche $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_5 o'_6)_2$, $(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_7 o'_8)_2$ entrambe congiunte a loro stesse.

Nè oltre questi tre sonvi in P altri punti fondamentali.

Da queste osservazioni discende:

La curva limite della $((PP'))_2$ è una $\Omega_6 \equiv o^4 o_1^2 o_2^2$ del 6° ordine e genere due.

Le Φ del sistema ∞^2 (corrispondente alle rette di P') sono $\Phi_5 \equiv o^3 o_1^2 o_2^2$ *di 5° ordine razionali dotati di un punto doppio variabile e tangenti in cinque punti variabili la* Ω_6.

Per le curve fondamentali di P abbiamo poi:

Ai punti base di $F^{(2)}$ corrispondono in P coniche per o, o_1, o_2 toccanti la curva limite in due punti fuori dei medesimi.

Ad entrambi i punti o'_5, o'_6 corrisponde la $(oo_1)_1$; ad entrambi i punti o'_7, o'_8 la $(oo_2)_1$. Ai punti o'_9, o'_{10}, o'_{11} tre raggi di o tangenti la Ω_6 fuori di questo punto.

10. Per la trasformazione $((P^{(1)} P'))_2$ identica alla $((PP'))_2$ possiamo ricavare le proprietà più importanti.

(*) Bertini: *Sopra alcune involuzioni piane*, n° citato.

(**) Caporali, l. c. n° 8.

La rete delle curve iperellittiche è una rete di

$$\Psi'_5 \equiv o_1'^2 o_2'^2 o_3'^2 o_4'^2 o'_5 o'_6 o'_7 o'_8 u'_1 u'_2 u'_3 ;$$

la $((P'))$ ad essa relativa è costruita dal fascio $F^{(2)} \equiv o'_1 o'_2 o'_3 o'_4$ e dalla punteggiata $(u'_1 u'_2 u'_3)_1$ projettivi.

I punti o'_9, o'_{10}, o'_{11} sono punti uniti della $((P^{(1)} P'))_2$.

Le $\Phi'_{G'}$, e $\Psi_{G'_1}$, coincidono nella curva H'_5 comune alle due reti ch'è il luogo dei punti di P' che hanno il medesimo conjugato nelle due involuzioni.

Nel piano $P^{(1)}$ i punti fondamentali sono $o^{(1)}$, o_1, o_2 cui corrispondono rispettivamente le curve

$$(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_5 o'_6 o'_7 o'_8 u'_1 u'_2 u'_3)_3$$

$$(o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_5 o'_6)_2, \quad (o'_1 o'_2 o'_3 o'_4 o'_7 o'_8)_2 .$$

11. Il sistema ∞^2 di raggi definito dalle tre forme projettive o, $o^{(1)}$, $F^{(2)}$ può considerarsi evidentemente come la $[C]$ generata o dalla $((PP'))_2$ o dalla $((P^{(1)} P'))_2$.

Nel dedurre le proprietà di essa dagli enunciati generali dobbiamo però tener conto della presenza di tre punti uniti u'_1, u'_2, u'_3 ovvero o'_9, o'_{10}, o'_{11} situati sull'intersezione della coppia di piani generatori. Pertanto abbiamo:

La $[C]$ è di 5° ordine e 5ª classe; G' e G'_1 sono raggi doppi di essa.

La H'_5 passa pei punti uniti o'_9, o'_{10}, o'_{11}, u'_1, u'_2, u'_3.

P, P', $P^{(1)}$ sono piani singolari della congruenza.

In P la curva della congruenza è una Γ_3 razionale di 3ª classe e 4° ordine, che tocca G' nei punti (non uniti) che questa ha in comune con H'_5.

In $P^{(1)}$ è una $\Gamma_3^{(1)}$ di 3ª classe e 4° ordine, che tocca G'_1 nei punti (non uniti) in cui essa sega la H'_5.

In P' havvi un sistema ∞^1 di raggi doppi di $[C]$ inviluppanti una conica Γ'_2 (la conica generata dalle due punteggiate projettive G' G'_1), che contata due volte costituisce la curva della congruenza di questo piano.

I punti fondamentali di P, P', $P^{(1)}$ sono singolari per la $[C]$: o ed $o^{(1)}$ sono vertici di coni cubici di genere uno appartenenti alla congruenza; o_1, o_2, o'_1, o'_2, o'_3, o'_4 di coni quadrici; o'_5, o'_6, o'_7, o'_8, o'_9, o'_{10}, o'_{11}, u_1, u_2, u'_3 di fasci di raggi.

Oltre i suindicati la $[C]$ *non ha altri punti singolari.*

Ciò resulta da facili considerazioni sulla costruzione geometrica esposta in principio.

12. Denotando con F la superficie focale della congruenza $[C]$ ora studiata possiamo dire:

La F *è di* 20° *ordine e* 20ª *classe; i raggi della* $[C]$ *sono bitangenti di essa; i punti* u'_1, u'_2, u'_3, o'_9, o'_{10}, o'_{11} *doppi conici.*

Il piano P *la tocca lungo la* $\Phi_{G'}$, *(del* 5° *ordine e* 8ª *classe) e la sega ulteriormente secondo la* Ω_6 *(curva limite) e la* Γ_3 *(curva della congruenza).*

Il piano $P^{(1)}$ *la tocca lungo la* $\Psi_{G'_1}$ *e la sega ulteriormente secondo la* $\Omega_6^{(1)}$ *e la* $\Gamma_3^{(1)}$.

Il piano P' *la tocca lungo la* H'_5 *(di* 5° *ordine e* 12ª *classe) e la sega ulteriormente secondo un luogo del* 10° *ordine che si scinde: nella conica* Γ'_2 *contata due volte e nelle sei tangenti di essa che passano pei punti in cui la* Ω_6 *interseca la* G', *le quali passano altresì rispettivamente pei punti in cui* $\Omega_6^{(1)}$ *sega* G'_1.

13. Notiamo infine che la costruzione geometrica da noi esposta è generalizzabile.

Assumendo infatti in P e P' rispettivamente due fasci di curve $\Phi^{(\mu)}$, $F^{(\nu)}$ degli ordini μ e ν ed una rigata razionale S_n d'ordine n, le di cui generatrici siano riferite projettivamente agli elementi dei due fasci, le rette appoggiantesi alle terne di curve corrispondenti generano un sistema ∞^2, il quale costruisce fra i piani P, P' una corrispondenza $[\mu, \nu]$.

Ed in ciascuno di questi piani i punti del gruppo corrispondente ad un punto dell'altro sono allineati.

Quando $\mu = 1$ la corrispondenza si ridurrebbe ad una $((PP'))_\nu$, le cui proprietà potrebbero dedursi in modo affatto analogo a quello da noi tenuto.

In quanto poi alla congruenza generata da questa corrispondenza multipla, essa potrebbe essere studiata o deducendo le sue proprietà da enunciati generali analoghi a quelli da noi stabiliti per le $[C]$ o individuandone in P' la rappresentazione piana.

GENERAZIONE DELLA SUPERFICIE D'ORDINE n

CON RETTA $(n-2)$-PLA.

Nota del dott. **Vittorio Murer**, a Spezia.

Adunanza del 13 maggio 1888.

1. Le superficie d'ordine n con una retta multipla secondo $n-2$ sono considerate dallo Sturm nel suo importante lavoro « *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung* » (*Math. Ann.*, Bd. IV, Heft. 2). I risultati cui pervenne l'illustre Geometra si potrebbero facilmente dedurre per altra via, basandosi su un modo per generare queste superficie, che mi par nuovo e interessante. Eccolo in breve:

Se $\varphi=0$, $\psi=0$ è l'equazione della retta $(n-2)$-pla, l'equazione della superficie si può ridurre alla:

$$\varphi^{n-2}u_0+\varphi^{n-3}\psi u_1+\varphi^{n-4}\psi^2 u_2+\ldots+\psi^{n-2}u_{n-2}=0.$$

Sotto questa forma mostra che la superficie può venir generata dalle due serie riferite proiettivamente:

$$\lambda^{n-2}u_0+\lambda^{n-3}u_1+\ldots+u_{n-2}=0 \quad \text{e} \quad \varphi-\lambda\psi=0;$$

l'una delle quali è una serie razionale di quadriche d'indice $n-2$, e

l'altra un fascio ordinario di piani. Essendo per altro ovvio che un fascio di piani, il cui asse sia r, e una serie *razionale* di quadriche ad indice $n - 2$ generano, se proiettivamente riferite, una superficie d'ordine n, per la quale la r è multipla secondo $n - 2$, si può dire che:

Una superficie generale d'ordine n, con una retta r multipla secondo $n - 2$, è sempre generabile mediante un fascio di piani avente per asse la r, ed una serie razionale di quadriche d'ordine $n - 2$ proiettiva ad esso.

Le intersezioni delle superficie corrispondenti costituiscono l'unico sistema di coniche che, in generale, giaccia sulla superficie; la quale poi passa evidentemente — con punto semplice — per i punti base che per avventura potesse avere la serie di quadriche.

2. Nel fascio di piani esistono due piani tangenti ad una quadrica; nella serie di quadriche si hanno $3(n - 2)$ superficie tangenti a un piano (*). Se ne deduce tosto che vi saranno nella serie $3(n-2)+2=3n-4$ quadriche tangenti al corrispondente piano del fascio, e segate da esso quindi in un pajo di rette. Dunque sulla superficie esistono $6n-8$ rette appoggiate alla r, e divise in $3n - 4$ paja.

Ogni piano per r contiene una conica della superficie; e vi saranno tante coniche tangenti ad r quante quadriche della serie tangenti alla retta stessa, cioè $2(n - 2)$. Esistono quindi sulla retta multipla $2(n-2)$ punti assintotici.

I poli di r rispetto alle coniche formano una curva, la quale ha su ogni piano passante per r un solo punto variabile e $2(n - 2)$ punti fissi, i punti assintotici. La curva è quindi di ordine $2n - 3$, ha per $(2n - 4)$-secante la r, ed è razionale.

La inviluppante della serie è di ordine $4(n - 3)$, ed incontra la r in altrettanti punti, per ognuno dei quali due delle $n - 2$ falde della superficie si toccano. Sulla r esistono pertanto $4(n - 3)$ punti cuspidali. Ecc.

(*) Conviene rammentare, anche per quello che segue, alcune formule elementari sulle serie razionali di superficie (Cfr. le due mie Note su questo argomento inserite nei volumi XXIV e XXV del *Giornale di Battaglini*).

Questi risultati concordano con quelli che si trovano nella citata memoria di Sturm alle pag. 254 e 259.

3. In particolare, per $n=3$ la generazione esposta si riduce a quella notissima per la superficie generale del 3° ordine (generazione dello Chasles).

Per $n=4$ si deduce che la nota superficie del 4° ordine con retta doppia è generabile sempre con un fascio di piani, avente per asse la retta doppia, e una *qualunque* serie ad essa proiettiva di quadriche ad indice 2 (le serie d'indice due sono sempre razionali). Essa passa per gli 8 punti base della serie stessa.

Spezia, 27 aprile 1888.

Dott. Vittorio Murer.

SOPRA CERTI SISTEMI DI LINEE E DI SUPERFICIE

Nota del dott. **Giulio Lazzeri**, a Livorno.

Adunanza del 13 maggio 1888.

1. In un piano sieno dati n punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e $n+2$ rette $r_1, r_2, \ldots, r_{n+2}$ tali che nessuna di esse passi per uno dei punti P_i e che tre di esse non passino per un punto.

Le $n+1$ rette $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_{n+2}$ si tagliano due a due in $\binom{n+1}{2}$ punti. Per essi e per gli n punti P_i passa una, ed una sola, curva C_i di ordine n, poichè è

$$\binom{n+1}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Le $n+2$ curve C_i così ottenute hanno $\frac{n(n-1)}{2}$ punti in comune oltre agli n punti P_i.

Infatti le $n+2$ curve di ordine $n+1$, ognuna delle quali è formata da una curva C_i colla retta r_i, hanno in comune gli n punti P_i e gli $\binom{n+2}{2}$ punti $r_i r_k$, cioè hanno $\binom{n+2}{2} + n = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$ punti comuni. Perciò appartengono ad un fascio, ed hanno altri

$$(n+1)^2 - \left[\frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1\right] = \frac{n(n-1)}{2}$$

punti comuni, i quali devono trovarsi sulle curve C_i.

Le $n+2$ curve C_i hanno in comune $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}-n$ unti. Dunque:

Le $n+2$ curve C_i appartengono ad un sistema lineare di ∞^n curve i ordine n.

2. Nel caso in cui è $n=2$ il teorema precedente diviene:

Dati in un piano due punti e quattro rette, le quattro coniche che assano per i due punti dati, e sono rispettivamente circoscritte ai trianoli che si posson formare colle rette date, hanno un terzo punto comune, perciò appartengono ad una rete di coniche.

Se i due punti dati sono i punti ciclici si ricava, come caso parcolare, un noto teorema di Clifford (*), cioè:

I quattro circoli rispettivamente circoscritti ai triangoli, che si possono ormare con quattro rette di un piano, hanno un punto comune.

3. Consideriamo ora nello spazio una curva piana Γ_n di ordine n e $n+3$ piani $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n+3}$ tali che quattro di essi non passino per un punto, che nessuno di essi coincida col piano della curva Γ_n, e che nessuna retta comune a due di essi incontri la curva Γ_n.

Indichiamo con (i,h) la retta comune ai piani Π_i, Π_h e con (i,h,k) il punto comune ai piani Π_i, Π_h, Π_k.

Gli $n+2$ piani $\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \ldots, \Pi_{n+3}$ hanno in comune $\binom{n+2}{3}$ punti. Per essi e per la curva Γ_n passa una, ed una sola, superficie Q_i di ordine n. Infatti perchè una superficie di ordine n contenga una curva piana di ordine n, è necessario e sufficiente che essa passi per $\frac{n(n+3)}{2}$ dei suoi punti, e perciò la Q_i è sottoposta ad

$$\binom{n+2}{3}+\frac{n(n+3)}{2}=\frac{n(n^2+6n+11)}{6}$$

condizioni, e quindi è completamente determinata.

Si ottengono così $(n+3)$ superficie Q_i di ordine n.

(*) Clifford: *Il senso comune nelle scienze esatte.*

Un piano Π_i è tagliato dalla curva Γ_n in n punti P, dagli altri piani Π secondo n rette $(i, 1), (i, 2), \ldots, (i, i-1), (i, i+1), \ldots, (i, n+3)$ e dalle superficie $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_{n+3}$ secondo $n+2$ curve di ordine n che passano per i punti P, e che, per il teorema del n° 1, hanno altri $N = \frac{n(n-1)}{2}$ punti comuni $P_i^{(1)}, P_i^{(2)}, \ldots, P_i^{(N)}$.

Dunque:

Ogni piano Π_i *contiene* N *punti* $P_i^{(s)}$, *pei quali passano le superficie* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_{n+3}$.

Il numero dei punti $P_i^{(s)}$ è $(n+3)N$.

Ogni superficie Q_i *contiene* $(n+2)N$ *punti* $P_r^{(s)}$ *(r diverso da i,* $s = 1, 2, \ldots, N$*).*

Due superficie Q_i, Q_h *hanno in comune* $(n+1)N$ *punti* $P_r^{(s)}$; *tre superficie* Q_i, Q_h, Q_k *hanno in comune n. N punti* $P_r^{(s)}$; *ecc.*

Due superficie Q_i, Q_h hanno in comune, oltre la curva Γ_n, una curva C_{ih} di ordine $n(n-1)$. Si ottengono così $\binom{n+3}{2}$ curve C_{ih}.

Ogni curva C_{ih} *contiene* $\binom{n+1}{3}$ *punti* (k, l, m) *ed* $(n+1)N$ *punti* $P_r^{(s)}$ *(k, l, m, r diversi da i ed h,* $s = 1, 2, \ldots, N$*).*

4. Supponiamo ora che più generalmente siano dati nello spazio una curva piana Γ_n di ordine n, e $m = n + 2 + p$ piani $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_m$, tali che quattro di essi non passino per un punto, che nessuno di essi coincida col piano della curva Γ_n, e che nessuna retta comune a due di essi incontri la Γ_n. Gli m piani individuano $\binom{m}{2}$ rette $(i, h) \equiv \Pi_i \Pi_h$, e $\binom{m}{3}$ punti $(i, h, k) \equiv \Pi_i \Pi_h \Pi_k$. Inoltre per i punti d'incontro tre a tre di $n+2$ di essi e per la curva Γ_n passa una superficie Q di ordine n. Restano così individuate $\binom{n+2+p}{n+2} = \binom{n+2+p}{p}$ superficie Q.

Le $n+2$ superficie Q che restano individuate combinando un piano Π_i colle combinazioni ad $n+1$ ad $n+1$ di altri $n+2$ piani Π passano per $N = \binom{n}{2}$ punti P del piano Π_i. Ogni piano Π_i con-

tiene perciò $\binom{n+2+p-1}{n+2}N=\binom{n+p+1}{p-1}N$ punti P, e quindi il numero complessivo dei punti P è

$$(n+p+2)\binom{n+p+1}{p-1}\binom{n}{2}=p\binom{n+p+2}{p}\binom{n}{2}$$

Ogni superficie Q contiene $(n+2)p.\ N$ punti P.

Le due superficie Q che si ottengono combinando gli stessi $n+1$ piani Π con altri due piani Π hanno in comune gli $\binom{n+1}{3}$ punti (ihk) intersezioni di quegli $n+1$ piani tre a tre, e $(n+1)N$ punti P situati sugli $(n+1)$ piani suddetti. Tutti questi punti (ihk) e P giacciono evidentemente sulla curva di ordine $n(n-1)$ comune alle due superficie Q.

Sarebbe facile determinare altre proprietà della figura individuata dalla curva Γ_n e dagli m piani Π_i; ma senza addentrarmi più oltre in questo studio, mi limiterò ad enunciare i teoremi che si ricavano dalle considerazioni precedenti per il caso in cui è $n=2$.

5. Sieno dati nello spazio una conica C e m piani $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ $(m \geq 5)$, tali che quattro di essi non passino per un punto, che nessuno di essi coincida col piano della conica Γ, e che nessuna retta comune a due di essi incontri la conica C. Gli m piani Π_i individuano $\binom{m}{2}$ rette $(ih)=\Pi_i\Pi_h$, $\binom{m}{3}$ punti $(ihk)=\Pi_i\Pi_h\Pi_k$, $\binom{m}{4}$ tetraedri $(ihkl)=\Pi_i\Pi_h\Pi_k\Pi_l$. A ciascun tetraedro $(ihkl)$ è circoscritta una quadrica Q_{ihkl} che passa per la conica C.

Quattro quadriche Q_{ihkr}, Q_{ilrh}, Q_{irhk}, Q_{ihkl}, che si ottengono combinando un piano Π_i colle combinazioni tre a tre dei quattro piani Π_h, Π_k, Π_l, Π_r passano per un punto $P_{i,hklr}$ situato sul piano Π_i.

Ogni piano Π_i contiene $\binom{m-1}{4}$ punti $P_{i,hklr}$ e quindi il numero complessivo di questi punti è $m\binom{m-1}{4}$.

Una quadrica Q_{ihkl} contiene i $4(m-4)$ punti $P_{i,hklr}$, $P_{h,iklr}$, $P_{k,ihlr}$,

$P_{l,ihkr}$, dove r è uno qualunque degli indici 1, 2, 3, ..., m, esclusi i, h, k, l.

Due quadriche Q_{ihkl}, Q_{ihkr} hanno in comune il punto (ihk) e i punti $P_{i,hklr}$, $P_{h,iklr}$, $P_{k,ihlr}$. Questi quattro punti perciò si trovano sulla conica che le due quadriche hanno in comune oltre la conica C. Si ha dunque:

Tre punti $P_{i,hklr}$, $P_{h,iklr}$, $P_{k,ihlr}$ individuano un piano $\Pi_{ihk,lr}$, il quale passa per il punto (ihk).

Il numero dei piani $\Pi_{ihk,lr}$ è $\binom{m}{3}\binom{m-3}{2} = 2m\binom{m-1}{4}$ cioè è il doppio del numero dei punti $P_{i,hklr}$.

Per un punto (ihk) passano $\binom{m-3}{2}$ piani $\Pi_{ihk,lr}$. Per un punto $P_{i,hklr}$ passano 6 piani $\Pi_{ihk,lr}$, $\Pi_{ihl,kr}$, $\Pi_{ihr,lk}$, $\Pi_{ilr,hk}$, $\Pi_{ikr,hl}$, $\Pi_{ilk,hr}$.

Due punti $P_{i,hklr}$, $P_{h,iklr}$ si trovano sui tre piani $\Pi_{ihk,lr}$, $\Pi_{ihl,kr}$, $\Pi_{ihr,kl}$. Dunque:

Tre piani $\Pi_{ihk,lr}$, $\Pi_{ihl,kr}$, $\Pi_{ihr,kl}$ passano per una retta $p_{ih,klr}$.

Il numero delle rette $p_{ih,klr}$ è eguale a quello dei piani $\Pi_{ik,klr}$ Ogni piano $\Pi_{ih,klr}$ contiene tre rette $p_{ihk,lr}$, $p_{ihl,kr}$, $p_{ihr,kl}$ come per una retta $p_{ih,klr}$ passano tre piani $\Pi_{ihk,lr}$, $\Pi_{ihl,kr}$, $\Pi_{ihr,lk}$.

Per un punto $P_{i,hklr}$ passano quattro rette $p_{ih,klr}$, $p_{ik,hlr}$, $p_{il,hkr}$, $p_{ir,hkl}$.

6. Nel caso in cui è $m = 5$ i teoremi precedenti divengono notevolmente più semplici. Ecco le proprietà principali relative a questo caso.

Data una conica C e cinque piani Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5, tali che quattro non passino per un punto, che nessuno coincida col piano della conica C, e che nessuna retta comune a due di essi incontri la conica C, si ottengono cinque quadriche Q_i che passano per C e sono rispettivamente circoscritte ai tetraedri $(hklr)$, i, h, k, l, r essendo gl'indici 1, 2, 3, 4, 5 scritti in un ordine qualunque.

Quattro quadriche Q_h, Q_k, Q_l, Q_r passano per un punto P_i del piano Π_i.

I dieci piani $\Pi_{ihk} = P_i P_h P_k$ passano rispettivamente per i dieci punti (ihk) di guisa che i punti P_i e i piani Π_i si corrispondono in un sistema nullo.

Le cinque quadriche Q_i sono rispettivamente circoscritte ai cinque tetraedri $P_h P_k P_l P_r$ che si possono formare coi cinque punti P_i.

7. Terminerò questa breve Nota osservando che, se la conica C è il circolo imaginario comune a tutte le sfere, i teoremi dei n[i] 5 e 6 ci danno come casi particolari altrettanti teoremi relativi alle sfere circoscritte ai tetraedri formati con m piani.

GIULIO LAZZERI.

Livorno, 28 aprile 1888.

SUR UN PROBLÈME DU CALCUL DES VARIATIONS

Par M. A. **Starkoff**, à Odessa.

Adunanza del 13 maggio 1888.

Dans mon article : « *Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations* » (*Bulletin de la Société Mathématique de Fra* t. XIII), j' ai montré que l'introduction de l'équation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \qquad (1)$$

ne permet pas de comprendre dans toute sa généralité la solution d'u problème.

J' exposerai ici un problème qui peut servir comme exemple d principe indiqué. Ce problème, dans la résolution duquel Moigno (*Calcul des variations*, Paris 1861, p. 299) a rencontré des difficultés en introduisant l'équation (1) et qui se résout très facilement sans l'introduction de l'équation (1), est le suivant :

Étant donnés deux plans parallèles et un point dans l'un d'eux, on se propose de mener de ce point à l'autre plan une ligne de longueur donnée, telle que l'aire de la surface cilindrique ayant cette ligne pour directrice et pour génératrices des perpendiculaires terminées aux deux plans, soit maximum.

Soient MN et $M_1 N_1$ les plans parallèles donnés, A le point donné

sur l'un d'eux et AB la ligne de longueur déterminée, tracée entre ces deux plans; cette ligne peut être tant courbe que brisée. Soient, de plus, A_1 et B_1, respectivement, les traces sur les plans $M_1 N_1$ et MN des perpendiculaires communes à ces plans menées par les points A et B.

L'aire $AA_1 BB_1$ est égale à la projection de AB multipliée par la distance des deux plans parallèles, qui est h. On peut donc écrire (si $\overline{ab}$ est un segment assez petit sur la ligne AB, $\overline{bc}$ sa projection sur un plan parallèle aux plans donnés mené par le point b, et α l'angle abc):

$$\text{aire } AA_1 BB_1 = h \times \text{project } AB = h \sum \overline{ab} \cos\alpha = h \int_0^{AB} \sqrt{1 - z_1^2}\, ds,$$

$$\text{où } \quad z_1 = \frac{dz}{ds}.$$

En prenant la variation de cette intégrale et en l'égalant à zéro, nous obtenons facilement

$$\frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial v}{\partial z_1} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial v}{\partial z_1} = c \quad \text{ou} \quad \frac{-z_1}{\sqrt{1 - z_1^2}} = c$$

et enfin

$$z_1 = \frac{dz}{ds} = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} = \cos\alpha = \text{constante},$$

une expression par laquelle se détermine la propriété de la courbe cherchée, qu'elle doit dans tous ses points faire un angle constant avec sa projection. Cette propriété appartient, comme on sait, à l'hélice.

Ainsi la réponse dans le cas le plus général s'obtient tout directement sans acune difficulté et indique tout clairement la propriété fondamentale de la courbe cherchée.

Odessa, 10 avril 1888.

A. Starkoff.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE COURBES UNICURSALES,

NOTAMMENT DE CELLE DU 5ème ORDRE DOUÉE

DE SIX POINTS DOUBLES.

Par M. E. de Jonquières, à Paris.

Adunanza del 27 maggio 1888.

I. — Dans une Communication à l'Académie des Sciences (séance du 12 décembre 1887, *Comptes Rendus*, t. CV, p. 1148), j'ai fait connaître comment on peut, dans chaque cas, formuler la composition des *bases* de deux faisceaux projectifs générateurs d'une courbe *unicursale*, d'ordre m quelconque, lorsque les points multiples et simples qui la déterminent complètement sont donnés de position. On y voit:

1° que les valeurs numériques n, n' des degrés des deux faisceaux générateurs doivent fournir une somme: tantôt égale au degré de la courbe qu'il s'agit d'engendrer, tantôt supérieure à ce degré d'une unité ou de deux au plus;

2° que les valeurs n, n', reconnues admissibles, déterminent la composition des deux *bases* des faisceaux, avec des points donnés, et avec des points *inconnus* qu'il s'agit de trouver, dans chaque cas, à l'aide des données de la question. (*)

(*) Je rappellerai ici que le nombre X de ces points *inconnus* résulte de la formule très simple $X = nn' - 1 - \Sigma rr'$, en désignant par r et r', respectivement, les ordres de multiplicité de deux points, simples ou singuliers (ordinaires), appartenant, l'un au faisceau

D'ailleurs à cause du peu d'espace réservé à de telles *Communications*, je ne suis entré dans aucun détail sur la solution *géométrique*, effective, d'aucun problème de cette nature, et je me suis borné à établir ce qu'on en peut appeler les *équations géométriques*, me bornant à montrer que la solution en est *théoriquement* possible. Ici, au contraire, je me propose, à titre d'exemple et d'application, de donner cette solution *effective* pour le cas de la courbe du 5^e ordre à 6 points doubles proprement dits, $C^5 = (6^2, 2^1)$; la seule, avec C^3 à un point double et C^4 à trois points doubles, dont on puisse prendre arbitrai-

---

(n), l'autre au faisceau (n'), qui se trouvent *superposés* l'un à l'autre dans les bases. S'il arrive que $\Sigma\, rr' = nn' - 1$, on a $X = 0$, et les deux bases se constituent alors avec les seuls points donnés, sans qu'il faille y adjoindre aucun point inconnu. La courbe unicursale du 5^e ordre, déterminée par 1 point triple, 5 points doubles et 5 points simples [que je désigne par la notation $C^5 \equiv (1^3, 3^2, 5^1)$] est dans ce dernier cas. On l'engendre, en effet, par les deux faisceaux, à bases (B^3), (B'^2), dont voici la composition, avec indication des points superposés

$$C^5 = \begin{cases} (B^3) \equiv [1^2, 3^1, a, b] & \text{cubiques à point double} \\ \qquad\quad \vdots \quad \vdots & \\ (B'^2) \equiv [1^1, 3^1 \qquad] & \text{coniques} \end{cases},$$

et les trois points simples restants parmi ceux qui sont donnés, servent à établir la projectivité des deux faisceaux; on a ici $\Sigma\, rr' = 2.\,1 + 3.\,1 = 3.\,2 - 1 = 5$; d'où $X = 0$.

Toutes les courbes unicursales, d'ordre m, douées d'un point désigné $(m-1)$-ple, sont dans le même cas, et il en est de même de beaucoup d'autres, par exemple (en ne considérant que les plus basses valeurs de m) :

$$C^6 = (1^4, 4^2, 5^1), \qquad C^6 = (3^3, 1^2, 6^1), \qquad C^6 = (2^3, 4^2, 3^1), \text{ etc.}$$

Pour cette dernière on a

$$C^6 = \begin{cases} (B^3) \equiv [1^2, 1, 4^1] & \text{cubiques à point double} \\ \qquad\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ (B'^3) \equiv [1, 1^2, 4^1] & \text{cubiques à point double} \end{cases}.$$

et $X = 3.\,3 - 1 - 2.\,2 - 4 = 0$.

REMARQUE. — Les surfaces algébriques, douées du nombre maximum de leurs points doubles (soit effectifs, soit par équivalence), sont loin d'offrir les mêmes facilités et exigent que, dans l'emploi des données qui les déterminent, il soit tenu compte de certaines conditions géométriques, ainsi que j'en ai fourni (dans les *Comptes Rendus* des 20 février et 26 mars 1888) des exemples concernant la construction de la surface cubique.

rement *tous* les points doubles qu'elle soit susceptible de posséder; en d'autres termes, dont tous les points doubles sont sans dépendances mutuelles.

II. — Soient α, β, γ, δ, ε, φ les six points doubles et a, b, les deux points simples donnés, qui la déterminent complètement.

D'abord il est aisé de se rendre compte que le problème ne peut se résoudre à l'aide de deux faisceaux (n), (n') tels que $n + n' = 5$, et qu' on est obligé d'admettre une ligne droite *adjointe*, c'est-à-dire de construire, en satisfaisant aux données, une courbe du 6^e ordre, dont une droite (arbitraire) fasse partie intégrante. Même avec une telle adjonction, l'emploi d'un faisceau de C^4, douées de points doubles, et d'un faisceau de coniques, est inadmissible, et il faut recourir à deux faisceaux cubiques, ce qui donne *a priori*, pour le nombre des points inconnus à introduire dans les bases de ces faisceaux :

$$X = 33 - 1 - 6 = 2.$$

On satisfait à toutes les conditions, en constituant les bases comme il suit :

$$C^6 = \begin{cases} (B^3) \equiv [\alpha^1,\ \beta^1,\ \gamma^1,\ \delta^1,\ \varepsilon^1,\ \varphi^1,\ a,\ x\ ] \text{ cubiques} \\ \quad\quad\quad\ \ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (B'^3) \equiv [\alpha^1,\ \beta^1,\ \gamma^1,\ \delta^1,\ \varepsilon^1,\ \varphi^1,\quad b,\ y] \text{ cubiques} \end{cases},$$

où les lettres x et y désignent les deux points inconnus qui d'ailleurs (pas plus que les points donnés a, b) ne sont pas superposés l'un à l'autre tandis que les points α, β, . . . , φ, simples dans chaque base, le sont, de manière à donner lieu, dans la courbe C^6 engendrée, aux six points doubles requis par l'énoncé de la question.

Tous les points donnés se trouvent ainsi utilisés convenablement dans les bases, sans qu'il entre dans celles-ci aucun point *auxiliaire* (ce qui est une condition essentielle). Pour pouvoir trouver les deux points inconnus x, y, et établir la correspondance projective des deux faisceaux, il suffit d'adjoindre une droite quelconque L, pourvu qu' elle ne passe par aucun des points donnés de C^5, et d' y prendre arbitrairement sept points auxiliaires 1, 2, . . . 7, qui compléteront la détermination d'une C^6. Celle-ci, moyennant une détermination convenable

des points x, y (que ces sept points auxiliaires permettront d'obtenir), aura six points doubles en α, β, . . . φ, passera une fois par les deux points a, b et se décomposera : en la droite L (puisqu'elle aura 7 points communs avec elle) et en une C^5 satisfaisant à toutes les conditions du problème.

Cela posé, voici la série des opérations à exécuter.

III. — Solution géométrique. — Joignons les deux points simples donnés a, b par une droite indéfinie M; puis supposons que, par les 7 points α, β, . . . φ, a, de la base (B) et, successivement, par chacun des 7 points auxiliaires 1, 2, . . . 7, on fasse passer les 7 faisceaux de cubiques que ces 8 points déterminent respectivement. Dans chacun de ces 7 faisceaux, les cubiques intercepteront sur la transversale M, outre le point a qui leur est commun à toutes, des segments (de deux points) qui seront en involution et qui correspondront anharmoniquement aux courbes d'où ils proviennent (*). On sait construire chacun de ces segments, avec la règle et le compas, sans tracer aucune cubique (**), et il suffit d'en connaître deux, pour que l'involution dont ils font partie soit déterminée.

Qu'on fasse de même avec les 7 points de la base (B'), qui sont les mêmes que ceux ci-dessus, sauf la substitution du point b au point a.

On aura de la sorte, sur M, 14 séries de segments en involution, et l'on sait trouver 14 segments, appartenant aux 14 séries respectivement et jouissant des deux propriétés suivantes, savoir, que 7 d'entr'eux appartenant au premier système, soient entr'eux en involution, et qu'ils correspondent anharmoniquement aux 7 autres, appartenant au second système, ceux-ci formant aussi entr'eux une deuxième involution (***).

Les sept segments dont il s'agit, étant, dans chacun des deux systèmes, en involution, dérivent ici nécessairement de 7 cubiques faisant

(*) *Voir* mon « *Essai sur la génération des courbes géométriques* » (*Mémoires des savants étrangers*, t. XVI) n° 42.

(**) *Voir* mes « *Mélanges de géométrie pure* », n° 45, pag. 195.

(***) *Voir* l' « *Essai* » précité, n° 26.

partie d'un même faisceau, encore inconnu, dont il faut déterminer la base. A cet effet si l'on prend deux quelconques d'entre elles, déterminées chacune par les 7 points déja connus (α, β, . . . φ, a, pour le 1er système, et α, β, . . . φ, b, pour le 2e système) et par celui des segments de M qui lui correspond, on aura deux cubiques, dans chaque système, déterminées par 9 points actuellement connus. Or ces cubiques ont en commun 7 points connus dans chaque système; donc, sans les tracer, il sera facile de construire (avec la règle et le compas) leurs deux autres points d'intersection (*), dont l'un est le point x pour le 1er système, et le point y pour le 2e système, et dont l'autre (dépendant des 8 points α, β, ... φ, a, x, ou α, β, ... φ, b, y, et par cela même inutile à mentionner) fera le complément total, de la base (B), ou (B'). (**).

Les deux bases des faisceaux générateurs de $C^6 = C^5 + C^1$ se trouveront ainsi constituées, et les 7 cubiques du premier passant, respectivement, par les 7 points 1, 2, . . . 7, correspondront anharmoniquement aux 7 cubiques du second faisceau; ce qui est la solution complète du problème proposé. En effet, si l'on mène une cubique quelconque du 1er faisceau (B) et la cubique *correspondante* du faisceau (B'), les trois autres points d'intersection de ces deux courbes, qui ont déja en commun les six points donnés α, β, γ, δ, ε, φ, seront 3 points appartenant à la C^6 demandée, qu' on saura ainsi construire *avec continuité*. La détermination de ces 3 points n'exige pas que l'on trace les deux cubiques, mais seulement deux coniques ayant un point connu commun, et dont les trois autres points communs (l'un d'eux sera toujours réel) seront précisément les 3 points cherchés; ce qu'on sait faire (***).

Ainsi le problème est résolu, puisqu'en faisant abstraction de la droite connue L, qui fait partie du lieu C^6 engendré, il restera la

(*) *Voir* mes « *Mélanges de géométrie pure* », n° 43, page 194.

(**) La *base* d'un faisceau de cubiques se compose, en effet, de 9 points et non de 8; mais de ces 9 points, il n'y en a que 8 indépendants ou *nécessaires*, et il n'y a point à s'occuper du neuvième, puisque celui-ci est déterminé implicitement dès que les 8 autres le sont.

(***) *Voir* mes « *Mélanges de géométrie pure* », n° 42, pag. 193.

courbe C^5, passant une seule fois par les points a, b, et ayant des points doubles aux six points α, β, . . . φ, parce que ces points appartiennent aux deux bases et qu'étant simples, dans chacune d'elles, ils donnent lieu chacun à un point double dans la courbe résultante, ainsi qu'il a été dit ci-dessus.

E. DE JONQUIÈRES.

Paris, mai 1888.

SUI SISTEMI LINEARI n-PLI DI SFERE DI UN n-SPAZIO. (*)

Pel dott. **A. Del Re**, a Napoli.

Adunanza del 10 giugno 1888.

1. Si prendano in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni, come coordinate di una sfera S le sue potenze $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ rispetto ai vertici $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ di un poliedro contenuto nello spazio stesso; e si ponga fra esse la relazione lineare

$$\sum_1^{n+1} m_i \alpha_i + m_{n+2} = 0, \qquad (1)$$

ove $m_1, m_2, \ldots, m_{n+2}$ sono coefficienti assegnati, ma qualunque. Si tratta di dimostrare il seguente teorema :

Tutte le sfere le cui coordinate soddisfanno alla relazione (1) *hanno una medesima potenza rispetto ad un punto fisso. Questo punto è il baricentro G dei coefficienti $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$, rispettivamente distribuiti nei vertici $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ del poliedro; e quella potenza è la somma, presa di segno mutato, del momento d'inerzia, rispetto a G, del sistema dei coefficienti così distribuiti e del termine noto, divisa per la somma dei coefficienti medesimi.*

(*) Questo articolo per $n = 3$ risolve la quistione 72 da me proposta nel *Giornale di Battaglini*, anno 1887.

Dicendo p la potenza della sfera S di coordinate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ rispetto ad un punto qualunque O; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ le coordinate del suo centro rispetto ad una n-pla di assi, a due a due ortogonali, che si incrociano in O, e con $x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots, x_n^{(g)}$ quelle del vertice A_g $(g = 1, 2, \ldots, n+1)$ del poliedro, si hanno le relazioni seguenti:

$$\alpha_g = \sum_1^n (x_i^{(g)})^2 - 2\sum_1^n x_i^{(g)}\xi_i + p \qquad (g = 1, 2, \ldots, n+1),$$

epperò, sostituendo in (1), viene:

$$\sum_1^{n+1} m_g \sum_1^n (x_i^{(g)})^2 - 2\sum_1^{n+1} m_g \sum_1^n x_i^{(g)}\xi_i + p\sum_1^{n+1} m_g + m_{n+2} = 0. \qquad (2)$$

Ora
$$\sum_1^{n+1} m_g \sum_1^n (x_i^{(g)})^2 = \sum_1^{n+1} m_g \delta_g^2$$

(ove δ_g è la distanza fra A_g ed O) rappresenta il momento d'inerzia del sistema dei coefficienti $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ ordinatamente collocati nei punti $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ rispetto al punto O. Perciò, indicandolo con I, e ponendo anche $\sum_1^{n+1} m_i = M$, la (2) si può scrivere nella forma

$$p = \frac{1}{M}\left(2\sum_1^{n+1} m_g \sum_1^n x_i^{(g)}\xi_i - I - m_{n+2}\right). \qquad (3)$$

Ora, una sfera il cui centro ha le coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, e la cui potenza rispetto al centro delle coordinate è p, ha per potenza rispetto ad un punto qualunque di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la seguente

$$\mathfrak{p} = \sum_1^n x_i^2 - 2\sum_1^n x_i \xi_i + p,$$

cioè, nel caso nostro ponendo per p il valore dato dalla (3)

$$\mathfrak{p} = \sum x_i^2 - 2\sum x_i \xi_i + \frac{1}{M}\left(2\sum m_g \sum x_i \xi_i - I - m_{n+2}\right). \qquad (4)$$

Questa relazione essendo lineare nelle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se si prende per $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il punto per cui

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \xi_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p}{\partial \xi_n} = 0$$

si avrà che, rispetto ad esso tutte le sfere in quistione avranno eguale potenza. Ma

$$\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial \xi_1} = -x_1 + \frac{\Sigma m_g x_1^{(g)}}{M}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial \xi_2} = -x_2 + \frac{\Sigma m_g x_2^{(g)}}{M}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial \xi_n} = -x_n + \frac{\Sigma m_g x_n^{(g)}}{M}$$

dunque quel punto ha le coordinate

$$\frac{\Sigma m_g x_1^{(g)}}{M}, \quad \frac{\Sigma m_g x_2^{(g)}}{M}, \quad \ldots, \quad \frac{\Sigma m_g x_n^{(g)}}{M}$$

epperciò esso è il baricentro G dei coefficienti $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ collocati nei punti $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Chiamando, per brevità, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ tali coordinate, e ponendole nella (4) in luogo delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si ha per valore costante di p il seguente

$$p = \sum \eta_i^2 - \frac{I + m_{n+2}}{M} = \frac{M\Sigma \eta_i^2 - I - m_{n+2}}{M}$$

Ma

$$M\sum \eta_i^2 - I = -I_0$$

ove I_0 è il momento d' inerzia del sistema dei coefficienti $m_1 m_2 \ldots m_{n+1}$ rispetto al loro baricentro, dunque

$$p = -\frac{I_0 + m_{n+2}}{M}$$

come volevasi dimostrare.

2. Se $M = 0$, G va all'infinito, e la equazione (2), che allora diventa

$$2\sum m_g \sum x_i^{(g)} \xi_i - I - m_{n+2} = 0,$$

dimostra che i centri di tutte le sfere della varietà rappresentata dalla (1) sono nell' $(n - 1)$-spazio lineare di coordinate (pluckeriane)

$$u_1 = -2\frac{\Sigma m_g x_1^{(g)}}{I + m_{n+2}},\quad u_2 = -2\frac{\Sigma m_g x_2^{(g)}}{I + m_{n+2}},\quad \ldots,\quad u_n = -2\frac{\Sigma m_g x_n^{(g)}}{I + m_{n+2}}.$$

Napoli, maggio 1888.

A. Del Re.

UN TEOREMA DI GEOMETRIA PROIETTIVA SINTETICA

ED ALCUNI SUOI COROLLARI.

Pel dott. **A. Del Re**, a Napoli.

Adunanza del 24 giugno 1888.

1. Il teorema si enuncia nella maniera seguente :

Tutte le omografie piane le quali hanno in comune tre coppie di punti corrispondenti, costituenti due triangoli omologici, hanno i loro triangoli fondamentali coniugati rispetto a quell'unica polarità nella quale i due triangoli omologici si corrispondono. (*)

Di vero, siano $ABC \equiv abc$, $A'B'C' \equiv a'b'c'$ i due triangoli corrispondenti comuni a tutte le omografie, e sia Π la polarità da essi individuata, cioè la polarità in cui hanno luogo le corrispondenze $\begin{matrix} A & B \\ a' & b' \end{matrix}$ $\left(\text{e quindi anche le altre } \begin{matrix} A' & B' & C' \\ a & b & c \end{matrix}\right)$. Componendo con Π una qualunque

(*) Se i due triangoli fossero omologici in più di un modo (in tre come avviene due cicli qualunque d'una omografia ciclica del 3° ordine, in quattro come può avvenire due tali cicli, in sei come avviene di due triangoli inflessionali di una cubica piana, sebbene in quest'ultimo caso non tutte le omologie sono reali) va inteso che si tratterebbe quella polarità che farebbe corrispondere ai vertici del primo triangolo i lati rispettivamente opposti ai vertici corrispondenti del secondo. In questo senso la proposizione enunciata si estende tale quale alle omografie di uno spazio lineare qualunque che fanno corrispondere fra loro due poliedri corrispondenti anche in una polarità di quello spazio; cioè si ha il teorema : *Le n-ple fondamentali di punti e spazii uniti delle diverse omografie di uno spazio lineare qualunque ad n — 1 dimensioni che fanno corrispondere due medesimi n-dri di quello spazio, corrispondenti pure in una polarità, sono coniugate rispetto a questa polarità.*

Ω di quelle omografie la corrispondenza $\Omega\Pi$ è essa stessa una polarità, poichè applicata al triangolo ABC fa corrispondere ai vertici di questo ordinatamente i lati opposti a, b, c. Chiamandola Π', si ha $\Omega\Pi \equiv \Pi'$; e perciò anche

$$\Pi\Pi' \equiv \Omega.$$

Questa relazione dimostra il teorema, poichè si ha la proprietà che, quando un' omografia è la risultante del prodotto di due polarità il triangolo fondamentale dell' omografia è coniugato comune rispetto a quelle polarità (*).

2. Risulta dal teorema precedente che *data un' omografia piana qualunque tutte le polarità rispetto alle quali si corrispondono le diverse coppie di triangoli omologici corrispondenti nella omografia sono coniugate al triangolo fondamentale di questa.*

3. Se ne ricava anche il seguente teorema nello spazio, che si trova pure nell'opera del Reye « Géométrie de position », t. II, pag. 291, quist. 54, ma con dimostrazione meno completa e meno sintetica di quella che qui diamo:

Tutte le cubiche sghembe che hanno a comune cinque punti sono segate da un piano arbitrario in terne di punti costituenti triangoli coniugati rispetto ad un medesimo sistema polare.

Di vero, siano A, B, C, S, S' i cinque punti comuni a tutte le cubiche, e π il piano trasversale. Proiettando da S, S' tutti i punti di una stessa cubica si hanno sul piano π coppie di punti corrispondenti in una stessa omografia, nella quale si corrispondono quindi le coppie $A_1 A'_1$, $B_1 B'_1$, $C_1 C'_1$ che si ottengono dal proiettare A, B, C; ed i punti comuni alla cubica ed al piano π sono precisamente i punti uniti di una tale omografia. Ora, variando la cubica, varia su π la omografia, ma questa avrà sempre per coppie di punti corrispondenti comuni le coppie $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, le quali costituiscono due triangoli omologici perchè sezioni con π dei due trispigoli omologici $S(ABC)$, $S'(ABC)$.

(*) Vedi le *Lezioni di Geometria proiettiva* del prof. Sannia, pag. 344.

Dunque in base al teorema del n° 1, la polarità rispetto a questi d triangoli è quella di cui è parola nel teorema.

4. Dal teorema precedente si ricava poi quest'altro :

Dati nello spazio cinque punti $ABCDE$, se in tutti i 10 modi po sibili si proiettano su un piano π da due di essi i rimanenti tre, si otte gono 10 coppie di triangoli omologici corrispondenti in uno stesso sister polare. O in altri termini: *Le 10 coppie di punti e rette che si ottengor dal segare con π le 10 coppie di elementi opposti del pentagono $ABCD$. si corrispondono rispetto ad un medesimo sistema polare.*

In fatti, nella polarità determinata in π da ogni coppia di quei trian goli omologici, devono essere coniugati, siccome risulta dalla dimostrazio ne del teorema 3, i triangoli formati dai punti che le cubiche circoscrit ad $ABCDE$ hanno comuni col piano π; ma tali triangoli sono coni gati (n° 3) rispetto ad una stessa polarità e non hanno alcun vertic e lato opposto comune (*), dunque tutte quelle polarità coincidon fra loro (**).

Napoli, giugno 1888.

A. Del Re.

(*) Vi possono essere infiniti triangoli coniugati rispetto ad infinite polarità; n allora tali triangoli hanno in comune un vertice ed il corrispondente lato opposto.

(**) Si osservi che il teorema ora dimostrato è anche conseguenza immedi del fatto che quando due triangoli sono omologici, essi sono corrispondenti in una p larità in cui al centro di omologia corrisponde l'asse di omologia ed alle rette co giungenti le tre coppie di punti corrispondenti corrispondono i punti d' intersezio delle tre coppie di lati corrispondenti.

SU UNA FAMIGLIA DI SUPERFICIE OMALOIDICHE.

Nota del dott. D. **Montesano**, a Roma.

Adunanza del 24 giugno 1888.

Nella presente Nota considero la superficie omaloidica di ordine arbitrario n siffatta che fra i suoi punti ed i piani di una stella (O) avente per centro un punto semplice della superficie, vi sia una corrispondenza univoca e *prospettiva*, nella quale cioè due qualsiansi elementi corrispondenti, l'uno, P, della superficie, l'altro, π, della stella (O) si appartengano.

Lo studio di queste speciali superficie omaloidiche è della maggiore importanza per la teoria delle reciprocità birazionali nulle, giacchè le superficie che in una tale reciprocità corrispondono alle stelle di piani, presentano il carattere ora accennato.

1. Sia dunque $\Phi_n \equiv O$ la più generale superficie omaloidica rappresentabile prospettivamente su i piani della stella (O).

Ad un fascio di piani della stella che abbia per asse la retta $r \equiv O$, corrisponde sulla Φ una curva gobba razionale R, la quale passa per gli $n - 1$ punti $(r\Phi_n)$ diversi da O, ed ha un altro punto su ogni piano π per r, sicchè risulta di n^{mo} ordine.

2. Prendendo di ogni piano π della stella (O) il polo P' in una correlazione polare nulla (Γ), si ottiene un punto del piano ω, che corrisponde ad O in (Γ); e su tale piano si viene a rappresentare punto

per punto la Φ_n in modo che un punto P della superficie e la sua immagine P' in ω sono su di un raggio PP' del complesso lineare Γ dovuto alla correlazione (Γ).

In tale rappresentazione alle rette r' di ω corrispondono sulla Φ le curve R_n del § 1, sicchè le sezioni piane della Φ avranno per immagini le curve $C_n \equiv K_1^{r_1} \dots K_l^{r_l}$ di un sistema lineare ∞^3 Σ, pel quale $\Sigma r^2 = n(n-1)$.

3. Il punto O della superficie Φ si comporta al pari di qualsiasi altro punto della Φ, esso cioè ha un unico piano ω' che gli corrisponde nella stella (O) e perciò anche un solo punto O' come immagine su ω.

I punti di sezione diversi da O di un raggio arbitrario r della (O) colla superficie Φ_n hanno per immagine su ω $n-1$ punti della retta r' che è coniugata alla r nella Γ, sicchè nella rete delle curve C_n di Σ che passano pel punto O' (e che perciò sono le immagini delle sezioni piane della Φ_n passanti per O) ogni fascio ha i suoi $n-1$ punti basi, diversi da O' e dai punti K, su di una retta r', e viceversa ogni retta r' è sostegno di un tale gruppo di $n-1$ punti, cioè i gruppi della rete delle $C_n \equiv O'$ (*) di Σ corrispondono *prospettivamente* alle rette r' di ω.

E l'n-mo punto, in cui una C_n del fascio avente i punti base su la r' sega tale retta, è il polo nella correlazione Γ del piano π che contiene la curva della superficie Φ di cui la C_n è l'immagine in ω.

4. Una rete arbitraria Π del sistema Σ determina una stella di piani (P) dello spazio, quella costituita dai piani sostegni delle curve della superficie Φ_n che hanno per immagine su ω le curve della rete Π che si considera.

E le due forme (P), Π vengono a corrispondersi univocamente in modo che ad ogni piano π della 1ª corrisponde nella 2ª la curva C immagine della $(\pi\Phi)$ ed a ogni retta g della 1ª il gruppo $(A'_1 \dots A'$ …

(*) Per brevità diremo *gruppo* di una rete ogni gruppo costituito dai punti base non fissi di un fascio della rete. Diremo anche *ordine* del gruppo il numero dei suoi punti.

della 2^a costituito dai punti che sono le immagini su ω degli n punti $(g\,\Phi_n) \equiv A_1, \ldots, A_n$; e siccome le rette $A_1 A'_1, \ldots, A_n A'_n$ appartengono al complesso lineare Γ, perciò gli n punti $A_1, \ldots, A_n$ sono la sezione del raggio g col gruppo di piani $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ della stella (O), che nella Γ corrisponde al gruppo $(A'_1, \ldots, A'_n)$.

Col variare della g nella stella (P) e del corrispondente gruppo $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ nella stella (O) fra le due forme (P), (O) viene ad aversi una corrispondenza reciproca $(1, n)$ di grado n, nella quale cioè ai raggi g di un fascio $(P - \pi)$ corrispondono gruppi $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ inviluppanti un cono di n^{ma} classe: $\gamma_n \equiv \chi_1^{r_1} \ldots \chi_l^{r_l}$ che è coniugato nella correlazione (Γ) alla curva C_n che nella rete Π corrisponde al piano π; e per ciò che ora si è detto la superficie generata dalle due stelle reciproche comprende la superficie Φ_n.

L'ulteriore parte di tale superficie è un cono χ_n luogo dei raggi g della stella (P) che appartengono ad uno dei piani α' del corrispondente gruppo della stella (O).

Si noti infatti che ogni piano ρ che contenga la retta $r \equiv P\,O$, ha per corrispondente nella rete Π una curva C_n che passa pel polo R di ρ nella Γ, sicchè al gruppo della Π che contiene il punto R, corrisponde un raggio g del piano ρ, e quindi fra gli n piani α che corrispondono a g nella stella (O) ve ne è uno, ρ, che contiene il raggio g.

Ed in un fascio $(P - \pi)$ della stella (P) vi sono n di tali raggi g, quelli che corrispondono agli n gruppi della rete Π contenenti ciascuno uno degli n punti R comuni alla curva C_n che nella rete Π corrisponde al piano π, ed alla retta r', che è coniugata nella correlazione Γ alla retta $r \equiv P\,O$, sicchè le rette g ora accennate formano un cono $\chi_n \equiv P^n r^{n-1}$.

E ci è lecito affermare che:

Dato in una stella (O) un reticolo di coni di classe n, i cui gruppi siano di ordine n, e fra di essi ve ne sia uno, γ, che abbia $n - 1$ dei suoi piani appartenenti ad un fascio (r), riferito proiettivamente il reticolo ad una stella di piani (P), che abbia il centro P sulla retta r, ed in modo che ad ogni piano ρ del fascio (r) corrisponda il cono del reticolo che contiene il gruppo γ e il piano ρ, fra la stella di raggi (P) e la stella di piani (O) viene ad aversi una corrispondenza reciproca $(1, n)$ siffatta che la superficie originata da tale corrispondenza si spezza in

un cono $\chi_n \equiv P^n r^{n-1}$ *ed in una superficie* $\Phi_n \equiv O$, *che è la superficie più generale rappresentabile prospettivamente sui piani della stella* O.

5. Ogni punto fondamentale, K_i, della rappresentazione della Φ_n su ω è l'immagine di una curva piana di Φ_n di ordine r_i, sicchè nel sistema Σ vi è una curva C_n che passa pel punto K_i con un ramo di più che le altre.

La superficie Φ_n ammette, in generale, una sola linea doppia, della quale l'ordine e l'immagine sul piano ω si determinano con i metodi indicati da Caporali (*).

Di maggiore importanza riesce la considerazione della congruenza delle congiungenti i punti della superficie Φ_n alle proprie immagini sul piano ω, giacchè trovandosi questa congruenza nel complesso lineare Γ gode proprietà, che per le congruenze analoghe (studiate anche dal Caporali) non si verificano.

Essa congruenza Q è di grado n; sono multipli per essa secondo $n-1$ i raggi del fascio $(O-\omega)$ del complesso Γ, sono multipli secondo $r_1, \ldots, r_l$ i raggi dei fasci $(K_1-\chi_1), \ldots, (K_l-\chi_l)$ di tale complesso.

Ulteriormente la Q ha altri $n+1$ fasci semplici, i quali hanno per centri $n+1$ punti $U_1, \ldots, U_{n+1}$ della curva $(\omega\Phi_n)$ di cui ciascuno riguardato appartenente alla superficie Φ ha come immagine su ω sè stesso.

Le curve $T_{n+1} \equiv K_1^{r_1} \ldots K_l^{r_l} U_1 \ldots U_{n+1}$, sezioni del piano ω con le superficie della congruenza Q_n contenute nelle singole congruenze lineari del complesso Γ, formano un sistema *lineare* ∞^4 siffatto che due curve del sistema hanno in comune $2n$ punti situati su di una conica.

Ogni curva T_{n+1} contiene due punti A, A' allineati con O, di cui ciascuno è centro di un fascio di raggi che insieme ad un fascio proiettivo di curve C_n del sistema Σ genera la curva.

Le coppie costituite dai punti A, A' ora accennnati, dovute alle curve T_{n+1} di un fascio, appartengono alla stessa conica che contiene i $2n$ punti non fissi, base del fascio.

Roma, giugno 1888.

DOMENICO MONTESANO.

(*) Caporali: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*, n° 16 (*Memorie di Geometria* edite da Pellerano, Napoli, 1888).

SULLE FUNZIONI AD INFINITI VALORI.

Nota del dott. **Giulio Vivanti**, a Mantova.

Adunanza dell' 8 luglio 1888.

1. Il celebre teorema sui periodi delle funzioni stabilito da Jacobi nella Memoria: *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis*, etc. (*) ha dato origine ad un errore che nessuno, per quanto io so, s'è preso cura di rettificare. Dal fatto, che una funzione a più di due periodi, quale è la funzione inversa d'un integrale abeliano di genere > 1, riprende uno stesso valore per valori della variabile quanto poco si vuole tra loro diversi, alcuni trassero la conseguenza, che un integrale abeliano di genere > 1 prende per ciascun valore del suo limite superiore tutti i valori possibili. Ciò si legge nella *Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen* di Prym (pag. 1) e nella *Theorie der Abelschen Functionen* di Clebsch e Gordan (pag. 134). L' averlo trovato ripetuto in una pregevole opera recente (**) m'induce a parlarne qui in breve.

2. Detto $\bar{y}_0$ uno dei valori che prende l'integrale abeliano $y = I(x)$ di genere $p > 1$ per $x = \bar{x}$, e indicando con $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$ i

(*) *Crelle's Journal*, Bd. XIII; *Jacobi's Werke*, Bd. II.

(**) Tichomandritzky: *Inversione degl' integrali iperellittici* (in russo). Kharkoff, 1885 — p. 68.

periodi di $I(x)$, tutti i valori che y prende per $x = \bar{x}$ saranno dati dall'espressione:

$$\bar{y}_0 + \sum_{i=1}^{2p} m_i C_i, \qquad (a)$$

dove $m_1, m_2, \ldots, m_{2p}$ possono prendere valori interi qualunque. Ora dalle ricerche di G. Cantor sugli aggregati (*Mannichfaltigkeiten*) di punti o di numeri risulta senza alcuna difficoltà che l'insieme dei punti che rappresentano nel piano y i numeri (a) è della 1ª potenza o classe (*Mächtigkeit*, *Klasse*) ossia è enumerabile (*abzählbar*). Questo insieme è bensì tale che in ogni parte comunque piccola del piano sono contenuti infiniti elementi di esso (cioè è *überalldicht*), ma è quasi un nulla in confronto all'insieme di tutti i punti del piano, che, come è noto, ha la 2ª potenza. Adunque è grave errore il dire che y prende tutti i valori possibili per ogni singolo valore di x; i valori che esso assume sono, è vero, in numero infinito e tra loro vicinissimi, ma non costituiscono che una parte minima, insignificante, dell'insieme di tutti i valori possibili.

3. Accennerò ora ad alcuni teoremi, i quali hanno stretta attinenza colle cose dette, e possono facilmente dimostrarsi col sussidio delle teorie di Cantor. Dirò per brevità, che una funzione ha la 1ª potenza od è della 1ª classe, quando l'insieme dei valori che essa prende per ogni singolo valore della variabile è della 1ª classe.

A. Se y considerata come funzione di x è della 1ª classe, lo stesso può dirsi di x considerata come funzione di y.

Rammentiamo che (*), se sopra un piano P si ha un insieme di infinite aree non aventi alcun punto interno comune, questo insieme è necessariamente enumerabile; e lo stesso avviene evidentemente se P, invece che un piano semplice, è un insieme enumerabile di piani. Dopo ciò si osservi che la riemanniana X (sul piano x) dei cui punti y è funzione monodroma e la riemanniana Y (sul piano y) dei cui punti x è funzione monodroma si corrispondono univocamente punto a

(*) Cantor, *Math. Annalen*, XX, p. 117; *Acta Mathematica*, II, p. 366.

punto e, in generale, con continuità. Ora X consta d'un insieme enumerabile di piani; ad ogni foglio di Y corrisponde in X almeno un'area connessa, quindi, se Y constasse d'un insieme non enumerabile di fogli, si avrebbe in X un insieme non enumerabile d'aree distinte, ciò che è impossibile.

In particolare le funzioni a più periodi sono della 1ª classe. Ciò si potrebbe senza difficoltà stabilire direttamente ricorrendo alla rappresentazione grafica di cui si serve Casorati (*).

B. Le funzioni definite da equazioni algebrico-differenziali lineari sono della 1ª classe.

Ciò si dimostra facilmente, considerando che un sistema d'integrali d'una equazione lineare a coefficienti algebrici subisce nell'intorno di ogni punto di diramazione una sostituzione lineare a coefficienti costanti, e che i punti di diramazione sono in numero finito.

4. Le funzioni della 1ª classe possiedono una proprietà caratteristica molto importante.

Poincaré ha dimostrato (**) che, se y è una funzione analitica qualunque di x, può sempre determinarsi una nuova variabile z tale che x ed y siano funzioni uniformi di z.

Per dare un'idea approssimata dell'essenza della dimostrazione di Poincaré, ricorderò anzitutto che, se x è il quadrato del modulo, ω il rapporto dei periodi d'un integrale ellittico, la funzione $x = f(\omega)$ è uniforme e riprende uno stesso valore in infiniti punti del piano ω costituenti un insieme di 1ª classe; inversamente $\omega = \varphi(x)$ è una funzione ad infiniti valori di 1ª classe. Se ora y è funzione di x ad infiniti valori, e si costruisce la riemanniana R (sul piano x) dei cui punti ω ed y sono funzioni monodrome, ω prende sulla R ciascun valore una sola volta (***); quindi, se si considerano come corrispondenti i valori di ω e di y che si riferiscono ad uno stesso punto della R, y

(*) *Acta Mathematica*, VIII.

(**) *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XI, pag. 112).

(***) Affinchè ciò abbia luogo, bisogna che non possa costruirsi alcuna riemanniana più semplice di R, dei cui punti ω sia funzione monodroma.

sarà funzione uniforme di ω. (*) Ma costruire la R nel modo indicato equivale a stabilire una corrispondenza univoca fra i valori di y e quelli di ω per ogni singolo valore di x; corrispondenza che evidentemente non può sussistere se y non è una funzione di 1ª classe. Dunque la dimostrazione di Poincaré vale solo per le funzioni aventi la 1ª potenza.

5. Ma v' ha di più. È facile provare che il teorema stesso cess d'esser vero se la funzione y ha potenza superiore alla prima. Infatti si costruisca la riemanniana X (sul piano x) dei cui punti y è funzione monodroma. Affinchè y possa mettersi sotto forma d'una funzione uniforme d'una variabile z, è necessario che la X, dopo opportuni tagli, possa distendersi sul piano z in modo da ricoprirlo una volta sola. Ora per quanto si disse a proposito del teorema A del n° 3 è chiaro che ciò non può farsi se non quando la X è costituita da un insieme enumerabile di fogli. Adunque si può completare il teorema di Poincaré dicendo che esiste una variabile z di cui x ed y sono funzioni uniformi *sempre* e *soltanto* quando y, come funzione di x, ha la 1ª potenza.

6. È noto che Poincaré(**) ha espresso gl'integrali d'un'equazione lineare a coefficienti algebrici e la variabile indipendente come funzioni uniformi (fuchsiane o zetafuchsiane) d'una nuova variabile. Da questo fatto e dal teorema enunciato alla fine del n° precedente segue come corollario il teorema B del n° 3.

Mantova, 22 giugno 1888.

GIULIO VIVANTI.

(*) È quasi inutile avvertire che questo sunto della dimostrazione di Poincaré, benchè sufficiente pel nostro scopo, non è nè completo nè esatto.

(**) *Vedi* i suoi lavori nei *Comptes Rendus* e negli *Acta Mathematica*.

ESTENSIONE DI UN TEOREMA DI NOETHER.

Nota del prof. P. del Pezzo, a Napoli.

Adunanza dell'8 luglio 1888.

Uno dei teoremi sui quali poggia gran parte della teoria delle curve piane è il seguente di Noether (*):

Ad ogni curva piana dotata di singolarità arbitrarie si può sempre riferire univocamente un'altra, che ha solo dei punti doppi.

Altri illustri geometri sono ritornati su questo teorema, fra i quali lo Halphen, che ne ha date nuove dimostrazioni sotto punti di vista differenti. (**)

Dovendo estendere in alcune mie ricerche uno dei metodi indicati dallo Halphen (***), e occorredomi considerare due curve riferite univocamente come due projezioni da centri diversi di una stessa curva immersa in uno spazio ad un numero conveniente di dimensioni; mi accorsi, che tal metodo si applicava colla stessa facilità alla teoria delle superficie, o a quella delle prime varietà di uno spazio a k dimensioni, e che forniva immediatamente la estensione del teorema di Noether.

Distratto in altre cose, per molto tempo non ritornai più su quella

(*) *Mathematische Annalen,* t. IX.

(**) *Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques* . (*Comptes Rendus* t. LXXX, p. 138) — *Sur une série de courbes analogues aux développées.* (*Journ. de Math.* 3^e série, t. II, p. 87).

(***) Nella prima delle succitate Memorie.

idea. Ma ora risvegliato da una recente conversazione tenuta col mio carissimo amico dott. Guccia, stacco da un insieme di studi, che forse pubblicherò un giorno, una parte riguardante tale argomento, e mi onoro darne comunicazione a questo illustre Circolo.

1. Sia F_2 una superficie del nostro spazio S dell'ordine n, che abbia lungo le curve $L_1, L_2, \ldots, L_s$ singolarità date $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, e nei punti $P_1, P_2, \ldots, P_i$ singolarità date $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i$. Tali singolarità s'intende, che siano in generale superiori, e supponiamo inoltre, che le curve L e i punti P siano comunque vincolati, sia tra loro, sia le une cogli altri rispetto ad F_2.

2. Denotiamo con A_k o con A'_k il numero delle condizioni a cui deve soddisfare una superficie F_2^m d'ordine m per avere lungo la curva L_k o nel punto P_k la singolarità λ_k o π_k. Per avere lungo tutte le curve L e in tutti i punti P le dette singolarità λ e π, essa dovrà soddisfare a

$$\sum A_k + \sum A'_k = A_0$$

condizioni, se quelle singolarità sono indipendenti fra loro per essa superficie, e ad un numero di condizioni minore di A_0, se sono vincolate.

Ma è noto, che l'ordine m della superficie può sempre prendersi tanto grande, che le singolarità date non presentino rispetto ad F_2^m nè vincoli fra loro nè vincoli insieme con altri h punti qualunque di S, pei quali si voglia far passare F_2^m. Sicchè per F_2^m l'avere le singolarità date ed il passare per altri h comunque scelti punti di S equivale ad $A_0 + h$ condizioni.

Preso così grande il numero m, il sistema delle F_2^m, che hanno lungo le curve e nei punti dati le singolarità date, è

$$\frac{1}{|6}(m+1)(m+2)(m+3) - A_0 - 1 = p_0$$

volte infinito. Poniamo ancora, che tre superficie qualsisieno del sistema s'incontrino in

$$m^3 - A_3 = p_3$$

punti variabili, dove con A_3 si è indicata l'*equivalenza* del gruppo base rispetto a tre F_2^m.

3. Pel modo come fu scelto m non avverrà, che le F_2^m passanti per un punto di S debbano di necessità passare per altri punti congiunti con quello. Sicchè le F_2^m formano il sistema rappresentativo di una varietà M_3 di tre dimensioni dell' ordine p_3 ed immersa in uno spazio $[p_0]$ di p_0 dimensioni (*). Le prime sezioni di M_3 sono superficie M_2, che corrispondono univocamente alle F_2^m, e le seconde sezioni curve M_1 corrispondenti alle curve Γ intersezioni variabili di due F_2^m.

4. Sia $m \geqq n$. Se $m = n$, la F_2^n del n° 1 rappresenta una superficie M' sezione di M_3 dell'ordine p_3 ed immersa in uno spazio di $p_0 - 1$ dimensioni, la quale le corrisponde univocamente.

Se $m > n$, allora F_2^n insieme con una F_2^{m-n} qualunque di S rappresentano una M_2 spezzata in due parti M' ed M'' rispettivamente corrispondenti ad F_2^n e ad F_2^{m-n}.

L'ordine di M' sia q_3, cioè quanto il numero delle intersezioni variabili di due F_2^m con F_2^n. Le M'', come le F_2^{m-n}, sono in numero

$$\frac{1}{6}(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)-1$$

volte infinito, sicchè i $[p_0 - 1]$ di $[p_0]$, che contengono M' e ciascuna delle M'', formano una varietà lineare altrettante volte infinita. Ne risulta, che M' è immersa in uno spazio di

$$p_0 - \frac{1}{6}(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3) = q_0 \qquad (1)$$

dimensioni.

Inoltre, poichè non vi sono sopra F_2^n gruppi di punti tali, che ogni F_2^m passante per uno di essi debba passare per gli altri (n° 2), e poichè F_2^n non ha punti nè curve singolari fuori della base delle F_2^m, se

(*) Indico con $[k]$, al modo di Schubert, uno spazio lineare a k dimensioni.

ne ricava, sia per $m = n$, sia per $m > n$, che la M' non ha punti singolari ne in numero finito nè in numero infinito.

5. Una F_2^{m-1} di S, che passa colle medesime singolarità per le curve L e pei punti P, insieme con un piano qualunque ω di S completa una F_2^m, e rappresenta una superficie N' immersa per la (1) in un $[p_0 - 4] \equiv O$, la quale insieme con la superficie N'' rappresentata dal piano ω forma una prima sezione di M_3. Se per O conduciamo tre $[p_0 - 1]$ arbitrari, questi segano M_3 secondo N' ed ulteriormente secondo tre superficie N''', N^{IV}, N^{V} corrispondenti a tre piani ω''', ω^{IV}, ω^{V}, e le tre superficie avranno come questi un solo punto comune. Vale a dire che ogni $[p_0 - 3]$ condotto arbitrariamente per O incontra la M_3 in un punto unico.

La M_3 è univocamente projettata da O sullo spazio S, ogni sua sezione projettata in una F_2^m, la superficie M' nella F_2^n.

Poichè M' è immersa in $[q_0]$, essa è projettata su F_2^n dalla intersezione di O con $[q_0]$, cioè dallo spazio

$$\Omega \equiv [q_0 + p_0 - 4 - p_0] \equiv [q_0 - 4]$$

com'era da prevedere. (*)

(*) La M' è una superficie *obbiettiva* di F_2^n. Anzi ricordando le formole trovate dal Guccia per calcolare il numero delle condizioni, a cui equivale per una superficie del nostro spazio l'avere in un punto dato, o lungo una curva data, una singolarità qualunque data (*Comptes Rendus de l'Acad. des sciences*, t. CV, 24 ott. 1887, e questi *Rendiconti*, t. II, p. 79); e prendendo m abbastanza grande affinchè : 1° la seconda delle formole del Guccia si applichi a ciascuna delle curve L; 2° le singolarità L e P non presentino vincoli; si potrà sempre ottenere trai numeri caratteristici di M' la relazione:

$$q_0 - q_1 + q_2 - q_3 = 2, \qquad (2)$$

dove q_1 è il genere di M', e q_2 il genere della sua sezione.

Le superficie per le quali ha luogo la (2) si chiameranno *normali de' generi* p_1 e p_2, e si può, per le cose dette sopra, formulare come estensione di un noto teorema di Clifford, che: *Ogni superficie del nostro spazio è sempre la projezione di una superficie normale.*

Svolgeremo altrove le conseguenze di tale enunciato.

6. In $[q_0]$ si prenda un $[q_0 - 4] \equiv \Omega'$ affatto arbitrario. Da Ω' la M' è univocamente projettata sopra uno spazio a tre dimensioni S' preso in $[q_0]$. Un punto qualunque R di M' determina con Ω' uno $[q_0 - 3]$, che incontra S' in un punto R'. Il luogo dei punti R' è una superficie Φ_2 dell'ordine q_3 projezione di M'.

I $[q_0 - 3]$ di $[q_0]$ passanti per Ω' generano una varietà lineare di tre dimensioni. Tra questi ve n'ha infiniti, che incontrano M' in due punti R_1 ed R_2, ed un numero finito, pei quali R_1 ed R_2 sono vicinissimi, ovvero che incontrano M' in tre punti R_1, R_2, R_3. Non vi sono $[q_0 - 3]$ uscenti da Ω', che segano M' in più di tre punti, ovvero in tre punti due dei quali sieno vicinissimi, ammenocchè lo spazio Ω' non sia stato scelto precisamente in uno dei $[q_0 - 3]$ contenenti più di tre punti ovvero un punto e una tangente di M', ciò che s'esclude.

Dunque la Φ_2 avrà una curva doppia, i cui punti sono projezioni delle coppie R_1 ed R_2, e su questa un numero finito di punti cuspidali, che si ottengono quando R_1 ed R_2 sono vicinissimi, ed un numero finito di punti tripli provenienti dalle terne R_1, R_2, R_3. Nè possiede altre singolarità.

7. Le due superficie F_2 e Φ_2, che sono projezioni univoche di una medesima M' da due diversi spazi centrali Ω ed Ω', si corrispondono univocamente, e si giunge così al teorema desiderato:

Ad una superficie del nostro spazio F_2^n dotata di singolarità superiori arbitrarie, comunque vincolate fra loro rispetto ad F_2^n, si può sempre riferire univocamente un'altra Φ_2 dotata di sole singolarità ordinarie.

8. I ragionamenti, che precedono, si possono estendere alle prime varietà di uno spazio a k dimensioni, e conducono ad uno analogo teorema.

9. Una F_h di $[k]$ $(h < k - 1)$ dotata di singolarità superiori sarà projettata sopra un $[h + 1]$ di $[k]$ in una M_h anche dotata di singolarità superiori. Ad M_h (n° prec.) si riferisca univocamente una N_h di $[h + 1]$, che abbia solo singolarità ordinarie. Questa può riguardarsi come projezione di una Φ_h immersa in uno $[t]$ $(t \geqq h + 1)$ o

in particolare in un [k] e priva di singolarità superiori. Ne disc de che:

Ad una F_b di [k] dotata di singolarità superiori si può sempre ferire univocamente una Φ_b di [l] o in particolare di [k] priva di s golarità superiori.

10. I sistemi di curve e di superficie p. e. sono varietà immerse in spazi il cui numero di dimensioni dipende dalla definizione del sistema. I complessi, le congruenze, le rigate sono varietà di uno spazio a cinque dimensioni. Per tutti questi enti geometrici esiste un teorema di Noether.

Napoli, 27 giugno 1888.

P. DEL PEZZO.

SOPRA UNA ESTENSIONE DELLA TERZA LEGGE

DI KEPLERO.

Nota del prof. **E. Betti**, a Pisa.

Adunanza del 24 giugno 1888.

Se denotiamo con P, T e Φ il potenziale, la energia cinetica e la funzione di Jacobi di un sistema Newtoniano, i punti del quale sono in moto gli uni relativamente agli altri, avremo:

$$P = \sum \frac{m_i m_s}{r_{is}}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{m_i m_s}{M} v_{is}^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum \frac{m_i m_s}{M} r_{is}^2$$

dove m_i è la massa concentrata nel punto m_i, M è la somma di tutte le masse, r_{is} la distanza di m_i da m_s, v_{is} la velocità relativa di m_i ed m_s.

Diremo che il sistema è *in moto stabile* quando il valore di Φ si conserverà sempre compreso tra due valori finiti, avrà un numero infinito di massimi e di minimi, e denotando con τ_0, τ_1, τ_2, ... i

tempi impiegati a passare dal 1° al 2°, dal 2° al 3°, dal 3° al 4°, ... dei massimi o minimi successivi di Φ, e con t_n il tempo impiegato per passare dal 1° all' n^{esimo}, $\frac{t_n}{n}$ col crescere di n converga verso un limite determinato che lo chiameremo il *tempo periodico medio* e lo denoteremo con θ.

Indichiamo con $\bar{\varphi}_n$ il valore medio di φ nel tempo t_n, cioè poniamo

$$\bar{\varphi}_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \varphi\, dt;$$

per un sistema in moto stabile $\bar{T}_n$ e $\bar{P}_n$ saranno indipendenti da n; potremo denotarli semplicemente con $\bar{T}$ e $\bar{P}$ e avremo

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\bar{P}.$$

Ora

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\sum m_i\, \bar{V}_i = \frac{1}{2} M \bar{V}$$

essendo $\bar{V}$ un valore compreso tra il massimo e il minimo dei valori di $\bar{V}_i$. Quindi ponendo

$$\bar{V} = \frac{M}{R},$$

otterremo

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{M^2}{R}.$$

Chiameremo *distanza media* la lunghezza R.

Analogamente avremo

$$\bar{T} = \frac{1}{2} M W^2.$$

Ad un sistema in moto stabile è applicabile il teorema dimostrato da **Clausius** per i moti da esso detti stazionari, quando si prenda t_n sufficientemente grande. Dunque, denotando con δ la variazione relativa ad R, e con δ' la variazione relativa ad M; ed essendo $\delta \bar{U} = -\delta\bar{P}$, l'equazione di **Clausius** darà

$$\delta\bar{P} + \delta\bar{T} + \delta'\bar{T} + 2\,\bar{T}\,\delta\log t_n = 0.$$

Ma

$$\delta' T = \frac{M^2}{4R} \delta \log M$$

$$\delta \overline{P} + \delta \overline{T} = \frac{3}{4} M^2 \delta \frac{1}{R} ;$$

quindi sostituendo e passando al limite

$$\delta \log \frac{M \theta^2}{R^3} = 0 ,$$

ed abbiamo il seguente

Teorema. — *Le variazioni del moto e della massa di un sistema Newtoniano in moto stabile non mutano il rapporto tra il cubo della distanza media e il prodotto della massa per il quadrato del tempo periodico medio.*

Nel caso di due sole masse questo rapporto è uguale al quadrato della costante di Gauss.

Pisa, giugno 1888.

E. Betti.

UN' OSSERVAZIONE SUI SISTEMI DI RETTE

DEGLI SPAZI SUPERIORI

di **Corrado Segre**, a Torino.

Adunanza del 12 agosto 1888.

Quantunque in varie ricerche geometriche pubblicate in questi ultimi anni compajano quei sistemi di rette di S_n che si presentano spontaneamente come analoghi ai sistemi doppiamente infiniti dello spazio ordinario, cioè i sistemi $n - 1$ volte infiniti, non mi pare che si sia cercato di estendere ad essi le proprietà *focali* notissime di quelli. Questa estensione è molto ovvia; ma nondimeno credo conveniente farne un cenno, essendo essa indispensabile per dare allo studio di quei sistemi di S_n un indirizzo ed uno scopo preciso.

Sia r un raggio qualunque di un sistema ∞^{n-1} di S_n (sistema che può anche non essere algebrico, purchè soddisfi in ogni caso per l'elemento r a certe condizioni di continuità). Cerchiamo tra gl'infiniti raggi del sistema che sono infinitamente vicini ad r quanti sono quelli che lo tagliano, cioè quanti sono i punti di r (che diremo *fuochi*) per ognuno dei quali passa un raggio del sistema infinitamente prossimo ad r. A tal fine consideriamo due S_{n-1}, α e β, i quali taglino r in due punti distinti, A e B. I raggi del sistema tagliano α e β in punti omologhi di una certa corrispondenza, la quale, limitata alle regioni di quegli spazi infinitamente vicine ai due punti omologhi A e B, cioè a quella corrispondenza che vien d[illegible]ta

dai raggi infinitamente vicini ad r, si riduce ad una collineazione. Ne segue che le due *stelle* di centri A e B contenute risp. in α e β son riferite collinearmente se vi si considerano come omologhe due rette quando sono incontrate da un raggio del sistema infinitamente prossimo ad r. Esse determinano sull' S_{n-2} d'intersezione di α e β un'omografia, i cui punti uniti son congiunti ad r mediante i piani (*focali*) contenenti i raggi cercati incidenti ed infinitamente vicini ad r.

In generale quei punti uniti sono $n - 1$ e quindi altrettanti saranno i fuochi (ed i piani focali) del raggio r. Ma è importante osservare che ogni caso particolare che possa presentare l'omografia considerata dell' S_{n-2} riguardo ai punti uniti conduce ad una specie particolare di singolarità che il raggio r potrebbe presentare.

I fuochi degli ∞^{n-1} raggi del sistema costituiscono una o più varietà (*focali*): nel caso più generale una varietà (riduttibile o no) ad $n - 1$ dimensioni. E le stesse considerazioni che furono usate per lo spazio ordinario, cioè per $n = 3$, da Kummer e da altri, provano che in generale gli $n - 1$ fuochi di un raggio del sistema sono punti di contatto del raggio stesso con la varietà M_{n-1} focale (e che il piano focale corrispondente ad uno qualunque di essi è tangente a questa negli altri, ossia sta negli $n - 2$ S_{n-1} tangenti alla varietà in quelli). Dunque *in generale un sistema ∞^{n-1} di raggi di S_n è un sistema di rette tangenti $n - 1$ volte ad una varietà M_{n-1}*.

Ma in casi particolari può accadere che il luogo di uno o più fuochi sia una varietà di dimensione inferiore $n - 1 - i$ che deve quindi esser incontrata una o più volte da tutti i raggi del sistema, ed esser luogo di punti *singolari* di questo (punti per cui passano coni di ∞^i raggi), ciascun dei quali va contato i volte tra i fuochi di ogni raggio passante per esso. Così le $n - 1$ condizioni di toccare una M_{n-1} in $n - 1$ punti possono sostituirsi in vari modi mediante condizioni (semplici o multiple) di contatto e d'incontro con varietà di ogni dimensione. — Ad esempio un sistema di raggi del 1° ordine (dicendo *ordine* di un sistema il numero dei raggi uscenti da un punto qualunque) non può avere una M_{n-1} focale (giacchè ogni punto che sia fuoco per un raggio è singolare pel sistema).

Torino, luglio 1883.

ANCORA SULLE FUNZIONI AD INFINITI VALORI.

Nota del dott. **Giulio Vivanti**, a Mantova.

Adunanza del 12 agosto 1888.

TEOREMA. — *Qualunque funzione analitica monogena* (nel senso dato a questa parola da Weierstrass) *prende per ogni valore della variabile un insieme enumerabile di valori, ossia è della prima classe* (*).

La dimostrazione di questo teorema si basa sulle seguenti due osservazioni.

a) Sia R la riemanniana d'una funzione analitica monogena $y = f(x)$. Un punto di diramazione P di essa dà luogo al passaggio, per mezzo di un moto elicoidale, da un foglio a più altri *successivamente*. Se ora si considerano i fogli che si congiungono nel punto P come disposti nell'ordine in cui li incontriamo nel moto elicoidale, si vede che essi formano una serie semplice, la quale corrisponde elemento ad elemento alla serie finita od infinita: $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Cioè:

I fogli della R che si congiungono in un punto di diramazione costituiscono un insieme enumerabile.

b) Prendasi a considerare un foglio A della R. Ciascuno dei punti di diramazione che si trovano in questo foglio deve ammettere un in-

(*) Questo teorema, di cui io sospettava l'esistenza, mi fu comunicato recentemente dal ch.mo prof. Giorgio Cantor, il quale nello stesso tempo mi esortava a tentarne dal mio canto la dimostrazione.

torno piccolo a piacere ma finito, entro il quale non v' ha alcun altro punto di diramazione; cioè i punti di diramazione del foglio *A* costituiscono un insieme *isolato*. Ma un tale insieme è, come si sa (*), sempre della 1ª classe, dunque:

I punti di diramazione posti in un foglio qualunque della *R* costituiscono un insieme enumerabile.

Dalle due osservazioni precedenti risulta che ciascun foglio della *R* è in comunicazione immediata con un insieme enumerabile di fogli. Ciascuno di questi alla sua volta è in comunicazione immediata con un sistema enumerabile di fogli; e così di seguito. Da qui si deduce facilmente, in base ai principî della teoria degli aggregati, che ciascun foglio della *R* è in comunicazione, immediata o no, con un insieme enumerabile di fogli. Ma, poichè y è funzione monogena, ciascun foglio della *R* dev'essere in comunicazione, immediata o no, con tutti gli altri fogli; dunque:

I fogli della *R* costituiscono un insieme enumerabile; o, in altre parole: La y è una funzione di prima classe.

È da notarsi che, ogni qualvolta si è parlato di un insieme enumerabile, si è inteso comprendere tacitamente il caso particolare d'un insieme finito. Così, per esempio, se y è un integrale abeliano, l'insieme dell'osservazione *b*) è finito; lo è invece quello dell'osservazione *a*), se y è la funzione inversa d'un integrale abeliano.

Mantova, 30 luglio 1888.

G. Vivanti.

(*) *Vedi* Cantor nei *Mathematische Annalen*, t. XXI, p. 52 (o negli *Acta Mathematica*, t. II, p. 373), Teorema I.

ESTRATTI DAI VERBALI

ADUNANZA DEL 10 GIUGNO 1888

PRESIDENZA M. L. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza :

Il prof. *Reggio* ed il prof. *Schlegel* ringraziano per la loro ammissione a soci non residenti del Circolo. — Accettano il cambio delle proprie pubblicazioni coi Rendiconti del Circolo : 1° la *Königliche Akademie der Wissenschaften* di Berlino; 2° la *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften* di Vienna; 3° la *Smithsonian Institution* di Washington.

II. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª : *Bibliot. Matem.)*.

III. — Comunicazioni :

BREGLIA. — *Sopra due teoremi del prof. Gebbia.*

DEL RE. — *Sui sistemi lineari n-pli di sfere di un n-spazio.*

ADUNANZA DEL 24 GIUGNO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. Corrispondenza :

Il dott. *Merlani* ringrazia per la sua ammissione a socio non residente del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª : *Bibliot. Matem.*).

III. — Ammissione di nuovi soci :

Dietro votazioni a schede segrete il prof. *Gabriele Torelli* (Napoli), proposto dai soci del Pezzo e Guccia, ed il dott. *Giuseppe Sforza* (Melfi), proposto dai soci Gerbaldi e Guidotti, sono eletti *soci non residenti.*

IV. — Memorie e Comunicazioni :

BASSANI. — Sopra un'equazione mista differenziale ed alle differenze finite.

DEL RE. — Un teorema di geometria proiettiva sintetica ed alcuni suoi corollari.

MONTESANO. — Su una famiglia di superficie omaloidiche.

BETTI. — Sopra una estensione della terza legge di Keplero.

PINCHERLE. — Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie che soddisfano ad equazioni lineari differenziali o alle differenze.

GUCCIA. — Osservazioni sopra alcuni recenti lavori sulla riduzione dei sistemi lineari di curve algebriche piane.

SUL CARATTERE ARITMETICO DEI COEFFICIENTI DELLE SERIE CHE SODDISFANO AD EQUAZIONI LINEARI DIFFERENZIALI O ALLE DIFFERENZE.

Nota di S. **Pincherle**, a Bologna.

Adunanza del 24 giugno 1888.

In una breve Nota inserita nel fasc. 1 del t. CIII del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ho dato un teorema relativo al carattere aritmetico che devono avere necessariamente i coefficienti delle serie di potenze, integrali di un'equazione differenziale lineare i cui coefficienti sono funzioni razionali intere aventi alla lor volta per coefficienti numeri interi. Per maggior brevità, si è ivi supposta l'equazione tale che la sua *equazione determinante*, relativa al punto $x = 0$, fosse irriducibile.

Nella presente Comunicazione, mi propongo di studiare come vada modificato il citato teorema nel caso in cui la detta equazione determinante non è più irriducibile, ed in particolare nel caso che $x = 0$ non sia punto singolare per tutti gl'integrali dell'equazione differenziale; mi gioverò pure della occasione per generalizzare anche in altra direzione il su citato teorema, e per aggiungervi qualche osservazione.

---

1. Siano, per $h = 0, 1, 2, \ldots, m$,

$$q_h(x) = a_{h.0} + a_{h.1}x + a_{h.2}x^2 + \ldots + a_{h.p}x^p$$

$m+1$ polinomî razionali interi del grado p, i cui coefficienti si supporranno numeri interi; e si consideri l'equazione differenziale lineare

$$
(1) \qquad \begin{aligned} & q_0(x)\varphi(x)+q_1(x)\varphi'(x)+\ldots+q_s(x)\varphi^{(s)}(x) \\ & \quad + x\,q_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)}(x)+\ldots+x^{m-s}q_m(x)\varphi^{(m)}(x)=0, \end{aligned}
$$

dove gli apici applicati alla $\varphi(x)$ sono indici di derivazione. Una tale forma di equazioni differenziali è stata considerata dal sig. Goursat (*), il quale ha dimostrato che, in generale, una tale equazione ha per $x=0$, s integrali regolari (a carattere razionale intero) e linearmente indipendenti. In questa forma rientrano i casi di $s=0$ ed $s=m$, studiati dal sig. Fuchs nella sua classica Memoria (**), ed al primo di questi casi ($s=0$) si riferisce il mio citato teorema sulla natura aritmetica dei coefficienti della serie integrale.

2 Prendasi un'integrale dell'equazione (1), sviluppabile nell'intorno di $x=0$ in una serie della forma

$$
(2) \qquad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\rho+n};
$$

si formino le derivate di questa espressione e si sostituiscano nell'equazione (1): il coefficiente del termine in $x^{\rho+n}$ dovrà essere nullo nello sviluppo, ed eguagliato a zero ci darà una relazione lineare ricorrente fra i coefficienti c_n. Si scorge senza difficoltà che questa relazione passerà fra i coefficienti da c_{n+s} a c_{n-p}, cioè avrà la forma:

$$
(3) \qquad A_0 c_{n+s}+A_1 c_{n+s-1}+A_2 c_{n+s-2}+\ldots+A_{s+p}c_{n-p}=0,
$$

e che in essa c_{n+s-k} sarà moltiplicata per una espressione della seguente forma:

(*) *Annales de l'École Normale Supérieure*, s. II, t. XII, 1883.
(**) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXVI.

$$(4)\left\{\begin{array}{l} A_h = a_{0.h-s} + a_{1.h-s+1}(\rho+n+s-h) + a_{2.h-s+2}(\rho+n+s-h)(\rho+n+s-h-1) + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ a_{s-1.h-1}(\rho+n+s-h)(\rho+n+s-h-1)\dots(\rho+n-h+2) + \\ a_{s.h}(\rho+n+s-h)(\rho+n+s-h-1)\dots(\rho+n-h+1) + \\ a_{s+1.h}(\rho+n+s-h)(\rho+n+s-h-1)\dots(\rho+n-h) \quad + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ a_{m.h}(\rho+n+s-h)(\rho+n+s-h-1)\dots(\rho+n+s-h-m+1). \end{array}\right.$$

Qui si può osservare:

a) che il minimo valore di h è o, il massimo è $p+s$;

b) che i coefficienti $a_{\mu,\nu}$ mancano (si fanno $=0$) se ν è negativo, o maggiore di p;

c) che il coefficiente di c_{n-p} $(h=s+p)$ è a_{op}, e quello di c_{n+s} $(h=0)$ è

$$(5) \qquad A_0 = (\rho+n+1)(\rho+n+2)\dots(\rho+n+s)D_0(\rho+n)$$

con

$$(5') \qquad D_0(\lambda) = a_{s.0} + a_{s+1.0}\lambda + a_{s+2.0}\lambda(\lambda-1) + \dots + a_{m.0}\lambda(\lambda-1)\dots[\lambda-(m-s-1)];$$

d) che infine, per ogni valore di h inferiore ad s, l'espressione A_h contiene dei fattori comuni: più precisamente, ponendo

$$h = s - k,$$

mancheranno in (4) i termini in $a_{0.h-s}$, $a_{1.h-s+1}$, ... fino ad $a_{k-1.-1}$ e si comincierà da $a_{k.0}$; per modo che

$$=(\rho+n+k)\dots(\rho+n+1)[a_{k.0}+a_{k+1.1}(\rho+n)+\dots a_{m.s-k}(\rho+n)\dots(\rho+n+k-m+1)],$$

o, per brevità,

$$A_h = (\rho+n+k)\dots(\rho+n+1)\,D_k(\rho+n).$$

3. Facciamo ora l'ipotesi che l'equazione $D_0(\lambda)=0$ sia irriducibi-

le (*). Richiamando i risultati ottenuti dal sig. Goursat (loc. cit.) sappiamo che gl'integrali di un sistema fondamentale dell'equazione (1), relativamente al modo di comportarsi nell'intorno del punto $x = 0$, si dividono in due classi: s di essi sono uniformi nell'intorno di quel punto, mentre gli altri $m - s$ sono singolari per $x = 0$.

Incominciamo coll'occuparci dei primi s. Sappiamo che per questi si può fare $\rho = 0$, con che l'equazione (3) si scrive, tenendo conto delle (5) e (6):

$$(3') \qquad (n+1)(n+2)\dots(n+s)D_0(n)c_{n+s}$$
$$+(n+1)(n+2)\dots(n+s-1)D_1(n)c_{n+s-1}+\dots$$
$$\dots+(n+1)D_{s-1}(n)c_{n+1}+A_s c_n + A_{s+1}c_{n-1}+\dots+A_{s+p}c_{n-p}=0.$$

Da questa, la c_s ed i coefficienti successivi si esprimono in funzione lineare delle arbitrarie $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{s-1}$: ora per queste arbitrarie sceglieremo numeri interi, e ricorderemo l'ipotesi fatta che anche i coefficienti numerici $a_{\mu,\nu}$ della (1) sono numeri interi. Segue da ciò che le

$$D_0(n), \quad D_1(n), \dots, D_{s-1}(n), \quad A_s, \quad A_{s+1}, \dots, A_{s+p}$$

sono pure numeri interi: ed indicando colla lettera E (affetta da varî indici) numeri interi positivi o negativi non altrimenti specificati, avremo dalla (3'), facendo $n = 0$:

$$c_s = \frac{E_0}{D_0(0)s!},$$

facendo $n = 1$:

$$c_{s+1} = \frac{E_1}{D_0(0)D_0(1)\,s+1!},$$

(*) Per il presente § basta anche l'ipotesi che $D_0(\lambda) = 0$ non abbia radici intere e positive.

e così via. Supponendo dimostrata fino a $\nu = n - 1$ la formola

$$(7) \qquad c_{s+\nu} = \frac{E_\nu}{D_0(0)D_0(1)\ldots D_0(\nu)\, s+\nu\,!},$$

dico che la medesima vale anche per $\nu = n$. Infatti, sostituendo nella (3') a $c_{n+s-1}, c_{n+s-2}, \ldots$ i loro valori della forma (7) (dove per c_n verrà posto

$$c_n = \frac{E_{n-s}}{D_0(0)D_0(1)\ldots D_0(n-s)\, n\,!}$$

coll'avvertenza che questa avrà significato solo per $n \geqq s$, e per $n < s$ sarà una costante arbitraria) e riducendo allo stesso denominatore, si trova

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+s)D_0(n)c_{n+s} = \frac{E_n}{D_0(0)D_0(1)\ldots D_0(n-1)n!},$$

onde si deduce immediatamente che la (7), supposta vera fino a $\nu = n-1$, è vera per $\nu = n$. C. D. D.

Si giunge così al seguente risultato:

Sia un'equazione differenziale lineare della forma (1), *a coefficienti numerici interi, la cui equazione* $D_0(\lambda) = 0$ *non abbia radici intere positive. Gl'integrali di questa equazione uniformi intorno al punto* $x = 0$ *sono esprimibili mediante la combinazione lineare a coefficienti arbitrari di* s *sviluppi in serie di potenze, i cui coefficienti posseggono i caratteri aritmetici:*

a) di essere razionali,

b) di poter essere ridotti ad una tale forma che il denominatore del n^{mo} *si ottenga da quello del* $(n-1)^{mo}$ *mediante la moltiplicazione per* $n\,D_0(n-s)$ *per ogni* $n > s$.

Osservando ancora che $D_0(n)$ è un'espressione della forma

$$E^0 + E'n + E^{(2)}n^2 + \ldots + E^{(m-s)}n^{m-s},$$

essendo sempre le $E^{(h)}$ numeri interi positivi o negativi, si ha che il massimo fattore p_n primo contenuto in $D_0(n)$ è

$$p_n \leqq |E^0| + |E'|n + \ldots + |E^{(m-s)}|n^{m-s}$$

e perciò che il limite di

$$\frac{p_n}{n^{m-s}},$$

quando n cresce indefinitamente, è una quantità finita; di conseguenza:

c) I denominatori delle frazioni c_n, ridotte alla forma precedente, contengono soli fattori primi soddisfacenti alla condizione

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n^{m-s}} = \text{quantità finita.}$$

4. Come caso speciale che si deduce facilmente da quanto precede, supponiamo $s = m$. In tal caso l'equazione (1) ammette m integrali uniformi per $x = 0$. L'equazione (3') diviene:

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+m)\,a_{m.0}\,c_{n+m}$$
$$+(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)(na_{m.1}+a_{m-1.0})\,c_{n+m-1}$$
$$+\ldots+a_{0.p}\,c_{n-p}=0;$$

e da questa è facile verificare che c_n è, in generale, della forma

$$c_n = \frac{E_n}{a_{m.0}^{n-m+1}\, n!}$$

per $n \geqq m$; mentre per $n < m$ le c_n sono costanti arbitrarie che si suppongono prese in numeri interi.

Donde risulta la seguente proposizione:

Sia un'equazione differenziale lineare della forma

$$q_0(x)\varphi(x) + q_1(x)\varphi'(x) + \ldots + q_m(x)\varphi^{(m)}(x) = 0 \quad (\text{vedi § 1})$$

dove i coefficienti $a_{\mu.\nu}$ sono numeri interi ed $a_{m.0} = 1$. L'integrale generale di quest'equazione può, nell'intorno di $x = 0$, venire posto sotto forma di combinazione lineare a coefficienti arbitrari di m sviluppi in serie di potenze, della forma

$$\sum \frac{g_n x}{n!},$$

dove le g_n sono NUMERI INTERI.

5. Veniamo ora a studiare la seconda specie d'integrali della (1) indicati in principio del § 3, e cioè quelli singolari per $x = 0$. (*) Essi sono sviluppabili in serie della forma

$$\sum c_n x^{n+\rho},$$

essendo, come è noto, ρ una radice dell' *equazione* di grado $m - s$

$$D_0(\rho - s) = 0 \tag{8}$$

già supposta irriducibile, (da cui segue in particolare che la differenza di due delle sue radici non sarà un numero intero.)

In questo caso, l'equazione (3) ci dà, tenuto conto delle (5) e (6):

$$\begin{aligned}(3'')\qquad & (\rho + n + 1) \ldots (\rho + n + s) D_0(\rho + n) c_{n+s} \\ & + (\rho + n + 1) \ldots (\rho + n + s - 1) D_1(\rho + n) c_{n+s-1} + \ldots \\ & \ldots + (\rho + n + 1) D_{s-1}(\rho + n) c_{n+1} + A_s c_n + A_{s+1} c_{n-1} + \ldots + A_{s+p} c_{n-p} = 0.\end{aligned}$$

Questa formola, fatto $n = - s + 1$, ci dà, supposto $c_0 = 1$:

$$c_1 = - \frac{D_1(\rho - s + 1)}{D_0(\rho - s + 1)(\rho + 1)},$$

fatto $n = - s + 2$:

$$c_2 = \frac{D_1(\rho - s + 1) D_1)\rho - s + 2) - D_2(\rho - s + 2) D_0(\rho - s + 1)}{D_0(\rho - s + 1) D_0(\rho - s + 2)(\rho + 1)(\rho + 2)},$$

e così via.

(*) In questo § faremo l'ipotesi che sia $a_{m,0} = 1$, il che non toglie nulla alla generalità del risultato.

Ora l'equazione irriducibile (8) definisce un *dominio di razionalità*, i cui numeri hanno la forma

$$k_0 + k_1 \rho + \ldots + k_{m-s-1} \rho^{m-s-1}, \tag{9}$$

dove le $k_0, k_1, \ldots, k_{m-s-1}$ saranno numeri razionali interi o frazionari: nel primo caso il numero (9) si indicherà con $E(\rho)$ e nel secondo con $F(\rho)$; e si vede che i coefficienti $c_1, c_2, \ldots$ sono esprimibili nella forma generale:

$$c_n = \frac{F_n(\rho)}{(\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+n)}, \tag{10}$$

che si dimostrerebbe assai facilmente col metodo ricorrente tenuto già a § 3. Si tratta ora di vedere com'è formato $F_n(\rho)$. Perciò pongo nella (3'') l'espressione (10), d'onde ottengo

$$\begin{aligned} & D_0(\rho+n)F_{n+s}(\rho) + D_1(\rho+n)F_{n+s-1}(\rho) + \ldots \\ & + D_{s-1}(\rho+n)F_{n+1}(\rho) + A_s F_n(\rho) + (\rho+n)A_{s+1}c_{n-1} + \ldots \\ & + (\rho+n)(\rho+n-1)\ldots(\rho+n-p+1)A_{s+p}F_{n-p}(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Ma siccome le D e le A sono numeri della forma $E(\rho)$, così risulta da questa:

$$F_{n+s}(\rho) = \frac{\overline{F}(\rho)}{D_0(\rho+n)},$$

dove i coefficienti del numero algebrico $\overline{F}(\rho)$ sono frazioni che contengono nei loro denominatori al più i denominatori dei coefficienti dei numeri $F_{n+s-1}, \; F_{n+s-2}, \ldots$

Ma $D_0(\rho)$, $D_0(\rho+n)$ non avendo, per ipotesi, radici comuni, potrà scrivere il loro risultante R_n nella forma

$$R_n = E'(\rho)D_0(\rho+n) - D_0(\rho)E''(\rho),$$

onde, per essere $D_0(\rho)=0$,

$$\frac{1}{D_0(\rho+n)}=\frac{E'(\rho)}{R_n}$$

e quindi

$$F_{n+s}(\rho)=\frac{\overline{F}(\rho)E'(\rho)}{R_n},$$

cioè i coefficienti del numero algebrico $F_{n+s}(\rho)$ contengono nei loro denominatori i fattori di R_n, in più dei fattori dei denominatori in F_{n+s-1}, F_{n+s-2}, ... ; lo stesso ragionamento essendo applicabile ad F_{n+s-1}, F_{n+s-2}, ... , ed essendo

$$F_1(\rho)=\frac{E_1(\rho)}{D_0(\rho-s+1)},$$

se ne conchiude:

$$F_{n+s}(\rho)=\frac{E_{n+s}(\rho)}{R_{-s+1}R_{-s+2}\ldots R_n}$$

e infine

$$c_{n+s}=\frac{E_{n+s}(\rho)}{R_{-s+1}R_{-s+2}\ldots R_n(\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+n+s)}.$$

Finalmente, si osservi che R_n è del grado $(m-s)^2$ in n, epperciò il massimo numero primo p_n contenuto in esso è tale che

$$\lim_{n=\infty}\frac{p_n}{n^{(m-s)^2}}$$

è una quantità finita. Ne risulta la seguente proposizione:

Sia un'equazione differenziale della forma (1), *a coefficienti numerici interi e con* $a_{m,0}=1$. *L'equazione determinante* $D_0(\lambda)=0$ *sia irriducibile. Gl'integrali non uniformi intorno al punto* $x=0$ *sono sviluppabili in serie della forma*

$$\sum c_n x^{\rho+n},$$

dove ρ *è una radice di* $D_0(\lambda) = 0$, *ed i coefficienti della serie medesima sono numeri algebrici, appartenenti al campo di razionalità definito dalla stessa* $D_0(\lambda) = 0$, *ed i cui denominatori razionali (ridotti i più semplici possibili) sono tali che i loro fattori primi hanno un limite finito con* $n^{(m-s)^2}$ *per* n *crescente indefinitamente.*

Per $s = 0$, si ricade sul mio citato teorema del t. CIII del *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

---

6. Ai risultati che precedono faccio seguire alcune brevi osservazioni:

a) Nel caso che due radici dell'equazione $D_0(\lambda) = 0$ differissero fra loro per un numero intero, uno degli $m - s$ integrali non uniformi per $x = 0$ conterrebbe il $\log x$. In tal caso varrebbero considerazioni analoghe alle precedenti sui coefficienti degli sviluppi di questi integrali; ma il grado dell'equazione che definisce il dominio di razionalità si abbasserebbe di 1 ed i fattori primi dei denominatori di questi coefficienti, ridotti come si è detto, sarebbero soggetti ad una condizione anche più restrittiva, essendo

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n^{(m-s)(m-s-1)}}$$

una quantità finita. Analogamente se più radici hanno fra loro una differenza di numeri interi.

b) I risultati della più volte citata Nota si estendono ai coefficienti degli sviluppi in serie che rappresentano gl'integrali di equazioni alle differenze, della forma:

$$(a_{00}+a_{10}x+\dots a_{m0}x^m)f(x)+(a_{01}+a_{11}x+\dots a_{m1}x^m)f(x+1)+\dots$$

$$\dots+(a_{0p}+a_{1p}x+\dots a_{mp}x^m)f(x+p)=R(x)\ (*),$$

(*) Con $R(x)$ s'intende una funzione razionale intera.

quando però agli sviluppi in serie di potenze si sostituiscano quelli della forma

$$\sum \frac{c_n}{x - \rho + n},$$

essendo ρ radice dell'equazione

$$a_{00} + a_{10} x + \ldots + a_{m0} x^m = 0.$$

c) Enuncio infine un teorema che può giovare alla generalizzazione dei risultati precedenti.

Abbiasi un insieme di numeri, di potenza 1, i quali appartengano tutti ad uno stesso dominio di razionalità (D), cioè della forma

$$(\alpha) \qquad c_n = m_{n.0} + m_{n.1}\varepsilon + \ldots + m_{n.p-1}\varepsilon^{p-1},$$

dove ε è radice di un'equazione algebrica irriducibile a coefficienti interi, ed $m_{n.0}, m_{n.1}, \ldots, m_{n.p-1}$ sono numeri razionali. I numeri c_n siano ordinati in p sistemi:

$$c_{h.0}, c_{h.1}, \ldots, c_{h.n}, \ldots \qquad (h = 1, 2, \ldots, r)$$

per ciascuno dei quali valga la condizione

$$(\beta) \qquad c_{h.n} \backsim \alpha^n, \qquad \alpha < 1.$$

Sia infine ρ un numero dello stesso dominio (D).

Sotto queste ipotesi, considero l'espressione

$$(\gamma) \qquad f(x) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{h.n}}{(x - \rho + n)^h}.$$

Questa serie converge assolutamente ed in egual grado in forza dell'ipotesi (β), per ogni valore di x non compreso nel sistema

$$(\delta) \qquad x = \rho - n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

e rappresenta una funzione analitica uniforme coi poli nei punti del si[illegible] stema (δ) e un punto singolare essenziale all'infinito. Ciò posto:

Se alla $f(x)$ applichiamo un numero qualunque di volte le operazion[illegible] *di moltiplicazione per potenze della variabile, derivazione e differenzia*[illegible]*zione finita, e combiniamo fra loro linearmente e con coefficienti interi* [illegible] *funzioni così ottenute, avremo come risultato una funzione della medes*[illegible]*ma forma, coi medesimi poli e con coefficienti appartenenti al medesim*[illegible] *dominio di razionalità e contenenti nelle loro espressioni della forma* (α[illegible] *nei denominatori, al più i fattori che sono nei denominatori delle* m_n[illegible] m_{n-1}, ...

Riola (Vergato), 3 agosto 1888.

S. PINCHERLE.

DELLA TRASFORMAZIONE CUBICA

DI UNA FORMA BINARIA CUBICA.

Nota del prof. **Gabriele Torelli**, a Napoli.

Adunanza dell'8 luglio 1888.

1. Il Clebsch nella classica Memoria *Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen* (*), accenna che se in una forma binaria c contenente a grado $2n+1$ o $2n$ le variabili x_1, x_2 queste debbono trasformarsi nelle y_1, y_2 mediante l'equazione

$$y_1 b_x^m - y_2 a_x^m = 0 \ ,$$

l'ordine m della trasformazione, quando supera n, può ribassarsi ad n, giacchè è sempre possibile determinare tre forme α, β, γ tali che si abbia

$$\alpha_x^n b_x^m - \beta_x^n a_x^m = \gamma_x^{m-n-1} . c \ , \tag{1}$$

se il grado di c è $2n+1$, e

$$\alpha_x^n b_x^m - \beta_x^n a_x^m = \gamma_x^{m-n} . c \ , \tag{2}$$

(*) *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* Fünfzehnter Band, S. 67.

se il grado di c è $2n$. Cosicchè la risultante l fra le

$$c = 0\,, \qquad y_1 b_x^m - y_2 a_x^m = 0$$

differisce dalla risultante λ fra le

$$c = 0\,, \qquad y_1 \beta_x^n - y_2 \alpha_x^n = 0$$

soltanto per un fattor costante.

L'asserita possibilità della determinazione di α, β, γ risulta dal fatto che, eguagliando i coefficienti delle medesime potenze delle variabili fra i due membri della (1) o della (2), si deducono fra gli $m + n + 2$, oppure $m + n + 3$ ignoti coefficienti delle α, β, γ, $m + n + 1$ equazioni lineari omogenee.

In particolare qualunque trasformazione di una cubica si riduce così ad una trasformazione lineare.

Le forme α, β, γ sono covarianti del sistema delle tre forme a, b, c; e il fattore, pel quale la risultante l differisce dalla risultante λ, ne è un invariante.

Però quantunque immediatamente si ricavano sotto forma di determinante i coefficienti di α, β, γ per mezzo dei coefficienti di a, b, c, non è agevole lo studiare in generale la loro formazione invariantiva per mezzo di a, b, c; nè quella del fattore pel quale l differisce da λ.

Nella presente Nota io mi propongo di eseguire questa ricerca nel caso particolare che una forma binaria cubica si trasforma mediante una trasformazione cubica, per quindi dedurne come i covarianti quadratico e cubico della trasformata si ottengono per mezzo di a, b, c.

2. Sia dunque c_x^3 la forma da trasformarsi,

$$y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0$$

l'equazione che stabilisce il legame fra le antiche variabili, e le nuove.

In un mio precedente lavoro (*) stabilii che, ponendo

$$\theta_x^3 = (ab)(bc)(ca)\, a_x b_x c_x\,,$$

(*) « *Sul sistema di più forme binarie cubiche* » (*Rendiconti della R. Accad. scienze fisiche e matem. di Napoli* — Ottobre 1885; oppure *Annali del R. Istituto* ... *nico di Napoli*. vol. III).

dicando con P, ∇_x^2, K_x^3 rispettivamente il discriminante, e i cova-
ti quadratico e cubico di questa forma θ, deve aver luogo l'identità

$$\begin{vmatrix} (a K)^3 & (\nabla a)^2 a_x & a_x^3 \\ (b K)^3 & (\nabla b)^2 b_x & b_x^3 \\ (c K)^3 & (\nabla c)^2 c_x & c_x^3 \end{vmatrix} = 0;$$

ia, posto

$$(a K)^3 (\nabla c)^2 c_x - (c K)^3 (\nabla a)^2 a_x = \alpha_x$$

$$(b K)^3 (\nabla c)^2 c_x - (c K)^3 (\nabla b)^2 b_x = \beta_x$$

$$(a K)^3 (\nabla b)^2 b_x - (b K)^3 (\nabla a)^2 a_x = \gamma_x,$$

ha identicamente

$$\alpha_x \,.\, b_x^3 - \beta_x \,.\, a_x^3 = \gamma_x \,.\, c_x^3 \,.$$

Laonde la risultante l_y^3 fra le

$$c_x^3 = 0\,, \qquad y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0,$$

la risultante λ_y^3 fra le

$$c_x^3 = 0\,, \qquad y_1 \beta_x - y_2 \alpha_x = 0$$

feriranno soltanto di un fattor costante. Dunque:

La trasformazione cubica

$$) \qquad y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0$$

operarsi sulla forma binaria cubica c_x^3, può ridursi alla trasformazione
eare

$$) \qquad y_1 \beta_x - y_2 \alpha_x = 0,$$

dove

$$(5)\qquad \alpha_x = (a\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 c_x - (c\mathrm{K})^3 (\nabla a)^2 a_x$$

$$(6)\qquad \beta_x = (b\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 c_x - (c\mathrm{K})^3 (\nabla b)^2 b_x;$$

essendo ∇_x^2, K_x^3 *i covarianti quadratico e cubico della forma*

$$\theta_x^3 = (ab)(bc)(ca)\, a_x b_x c_x.$$

3. Cerchiamo ora il modulo $(\alpha\beta)$ della trasformazione lineare (4). Dalla (5) si deduce

$$(7)\qquad (\alpha\beta) = (a\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 (c\beta) - (c\mathrm{K})^3 (\nabla a)^2 (a\beta);$$

ma la (6) dà

$$(c\beta) = (b\mathrm{K}')^3 (\nabla' c')^2 (cc') - (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla' b)^2 (cb)$$

$$(a\beta) = (b\mathrm{K}')^3 (\nabla' c')^2 (ac') - (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla' b)^2 (ab);$$

dunque sostituendo nella (7) e riflettendo che

$$(a\mathrm{K})^3 . (b\mathrm{K}')^3 . (\nabla c)^2 (\nabla' c')^2 (cc')$$

è nullo, si ha

$$(\alpha\beta) = (a\mathrm{K})^3 (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla c)^2 (\nabla' b)^2 (bc) + (c\mathrm{K})^3 (b\mathrm{K}')^3 (\nabla a)^2 (\nabla' c')^2 (c'a)$$

$$+ (c\mathrm{K})^3 (c'\mathrm{K}')^3 (\nabla a)^2 (\nabla' b)^2 (ab)$$

$$= (c'\mathrm{K}')^3 [(a\mathrm{K})^3 (\nabla c)^2 (\nabla' b)^2 (bc) + (b\mathrm{K})^3 (\nabla a)^2 (\nabla' c)^2 (ca) + (c\mathrm{K})^3 (\nabla b)^2 (\nabla' a)^2 (ab)]$$

Ora dal § 6 della medesima mia Nota più sopra citata si ricavano le relazioni

$$3(\nabla b)^2 (\nabla' a)^2 (ab) = 2\,\mathrm{P}\,(ab)^3$$

$$3(\nabla c)^2 (\nabla' b)^2 (bc) = 2\,\mathrm{P}\,(bc)^3$$

$$3(\nabla a)^2 (\nabla' c)^2 (ca) = 2\,\mathrm{P}\,(ca)^3,$$

donde moltiplicando rispettivamente per $(c\,K)^3$, $(a\,K)^3$, $(b\,K)^3$ e sommando

$$3[(cK)^3(\nabla b)^2(\nabla' a)^2(ab)+(aK)^3(\nabla c)^2(\nabla' b)^2(bc)+(bK)^3(\nabla a)^2(\nabla' c)^2(ca)]$$

$$=2P\,[(ab)^3\,(c\,K)^3+(b\,c)^3\,(a\,K)^3+(c\,a)^3\,(b\,K)^3];$$

ma

$$(a\,b)^3\,c_x^3+(b\,c)^3\,a_x^3+(c\,a)^3\,b_x^3=3\,\theta_x^3,$$

perciò

$$(ab)^3\,(cK)^3+(bc)^3\,(a\,K)^3+(c\,a)^3\,(b\,K)^3=3\,(\theta\,K)^3=3P;$$

laonde

$$(cK)^3(\nabla b)^2(\nabla' a)^2(ab)+(aK)^3(\nabla c)^2(\nabla' b)^2(bc)+(bK)^3(\nabla a)^2(\nabla' c)^2(ca)=2P^2,$$

e quindi infine

$$(\alpha\beta)=2\,(c\,K)^3P^2,$$

la quale, posto per semplicità

$$(c\,K)^3=\Upsilon,$$

può scriversi

$$(8)\qquad (\alpha\beta)=2\,\Upsilon\,P^2.$$

4. Ciò posto designamo delle tre forme c_x^3, λ_y^3, l_y^3 rispettivamente con g, Γ, G i discriminanti, con Δ_x^2, φ_y^2, f_y^2 gli hessiani, con Q_x^3, Σ_y^3, S_y^3 i covarianti cubici.

Essendo $(\alpha\beta)$ il modulo della trasformazione lineare che conduce da c_x^3 a λ_y^3, si ha

$$\Gamma=(\alpha\beta)^6 g,$$

e quindi in virtù della (8)

$$\Gamma=2^6\,\Upsilon^6\,P^{12}\,g.$$

Ora si ha inoltre (*)

$$2^2 G=3^{12}\Upsilon^2 g:$$

(*) Vedi le due mie Note: « *Teoremi sulle forme binarie cubiche e loro applicazione geometrica* », e « *Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali* » (*Annali del R. Istituto tecnico di Napoli*, vol. II, 1885 e *Giornale di Matem. Battaglini*,

paragonando le due ultime relazioni si trae

$$3^{12}\Gamma = 2^8 \Upsilon^4 P^{12} G.$$

Or poichè λ_y^3 non differisce da l_y^3 che per un fattor costante, e Γ discriminante di λ_y^3 differisce da G discriminante di l_y^3 pel fattore $\frac{2^8}{3^{12}} \Upsilon^4 P^{12}$, vuol dire che λ_y^3 non differisce da l_y^3 che pel fattore $\frac{2^2}{3^3} \Upsilon P^3$. Avremo perciò

$$3^3 \lambda_y^3 = 2^2 \Upsilon P^3 l_y^3 .$$

Dunque:

Applicando alla forma binaria cubica c_x^3 la trasformazione lineare (4) *si perviene al risultato cui condurrebbe la trasformazione cubica* (3) *moltiplicato pel fattore* $\frac{2^2}{3^3}\Upsilon P^3$; *dove* $\Upsilon = (cK)^3$, *e* P *è il discriminante della forma* θ_x^3.

5 Ciò premesso è noto che operando la trasformazione lineare si ha

$$(\text{Risultante di } \Delta_x^2 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{1}{(\alpha\beta)^2}\varphi_y^2$$

$$(\text{Risultante di } Q_x^3 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{1}{(\alpha\beta)^3}\Sigma_y^3 .$$

Ora pel precedente paragrafo si ha

$$\varphi_y^2 = \frac{2^4}{3^6}\Upsilon^2 P^6 f_y^2$$

$$\Sigma_y^3 = \frac{2^6}{3^9}\Upsilon^3 P^9 S_y^3,$$

---

vol. XXIV, 1886, pag. 270, 280). Fu il Workman nella Memoria « *The Theory of the singular solutions of integrable differential equations of the first order* » (*The Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, anno 1887, p. 198) il quale fece notare la connessione fra la teoria delle equazioni algebrico-differenziali, e quella delle trasformazioni di ordine superiore trattate dal Gordan nella Memoria « *Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen* » (*Giornale di Crelle*, vol. 71, p. 164). Se prima io avessi studiata quest'ultima memoria avrei nella mia « *Contribuzione* etc. » abbreviati alcuni ragionamenti, poggiandomi per le ulteriori deduzioni su qualche risultato già ottenuto dal Gordan.

e pel paragrafo 3 si ha

$$(\alpha\beta) = 2\,\Upsilon\,\mathrm{P}^2;$$

dunque

$$(\text{Risultante di } \Delta_x^2 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{2^2}{3^6}\,\mathrm{P}^2 f_y^2$$

$$(\text{Risultante di } Q_x^3 \text{ ed } y_1\beta_x - y_2\alpha_x) = \frac{2^3}{3^9}\,\mathrm{P}^3 S_y^3,$$

le quali ultime offrono la relazione fra i covarianti quadratico e cubico della forma ottenuta da c_x^3 mediante la trasformazione cubica, e i medesimi covarianti della forma primitiva.

Napoli, giugno 1888.

G. TORELLI.

CONDIZIONE GEOMETRICA

PER LA REALITÀ DEI PUNTI E DELLE TANGENTI

COMUNI A DUE CONICHE.

Nota del dott. **G. Sforza**, a Melfi.

Adunanza del 22 luglio 1888.

Il signor Gerbaldi in una sua Nota inserita in questi *Rendiconti* (*) ha indicato un processo numerico assai semplice per riconoscere se le intersezioni di due coniche sono o non sono tutte reali. Mi pregio di comunicare a questo on.^{e} Circolo una risoluzione geometrica della stessa questione.

Userò la notazione del signor Gerbaldi e indicherò quindi con

$$a_x^2 = 0 \qquad a_x'^2 = 0$$

le equazioni delle due coniche date C_1, C_2; con A_1, Θ_1, Θ_2, A_2 gli invarianti fondamentali delle due forme a_x^2, $a_x'^2$; ecc.

Ponendo allora

$$\Omega = (\Theta_2^2 - \Theta_1 A_2)u_\alpha^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1 \Theta_2)u_\varrho^2 + (\Theta_1^2 - \Theta_2 A_1)u_{\alpha'}^2,$$

(*) *Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche* (t. I, pag. 327).

ıostrerò che : *condizione necessaria e sufficiente perchè le intersezioni* C_1 e C_2 *siano tutte reali è che la conica* $\Omega = 0$ *sia immaginaria.*

Per verificare questo teorema basta riferire le coordinate al trian- › proprio-coniugato comune a C_1 e C_2. Si trova allora che, posto che c C_2 siano rappresentate dalle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \qquad m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0,$$

$\Omega = 0$ è rappresentata dalla

$$(m_2 - m_3) u_1^2 + (m_3 - m_1) u_2^2 + (m_1 - m_2) u_3^2 = 0.$$

Ne segue che la coppia dei punti di contatto delle tangenti ad $= 0$ nel fascio $u_3 = 0$ è rappresentata dalla

$$(m_2 - m_3) u_1^2 + (m_3 - m_1) u_2^2 = 0.$$

Dunque questa coppia è armonica alla coppia

$$(m_2 - m_3) u_1^2 - (m_3 - m_1) u_2^2 = 0.$$

Ma quest'ultima coppia è quella dei punti in cui il lato $x_3 = 0$ lia quella conica del fascio $C_1 C_2$ che ha punto doppio in $u_3 = 0$, ıque : *Conducendo per un vertice del triangolo proprio-coniugato comune* C_1 *e* C_2 *i due lati del triangolo stesso, i due lati del quadrangolo comune* C_1 *e* C_2 *e le due tangenti ad* $\Omega = 0$, *si ottengono tre coppie di rette due due armoniche.*

Segue di qui che, se il quadrangolo comune a C_1 e C_2 è reale, sarà cessariamente Ω immaginaria, e se invece detto quadrangolo è tutto parte immaginario, sarà Ω reale. Ciò che appunto era da dimostrare.

Accennerò un'altra dimostrazione.

Si ponga

$$F_\lambda = u_\alpha^2 + 2\lambda u_\varphi^2 + \lambda^2 u_{\alpha'}^2,$$

si indichino con λ_1, λ_2, λ_3 le tre radici della

$$A_1 + 3\Theta_1\lambda + 3\Theta_2\lambda^2 + A_2\lambda^3 = 0.$$

Allora sussiste la relazione

$$(\lambda_2 - \lambda_3)^2 F_{\lambda_1} + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 F_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 F_{\lambda_3} \equiv \Omega .$$

Il signor Gerbaldi ha dimostrato (l. c. pag. 331) che, se le intersezioni di C_1 e C_2 sono tutte reali, saranno F_{λ_1}, F_{λ_2}, F_{λ_3} tutte negative. Da ciò è facile poi dedurre di nuovo che $\Omega = 0$ è allora immaginaria e viceversa.

La forma canonica di Ω dimostra che Ω è un combinante delle due forme a_x^2, a'^2_x.

Si trova poi ancora facilmente che *il polo y di una retta u rispetto alla conica* $\Omega = 0$ *è il reciproco rispetto a tutte le coniche del fascio* $C_1 C_2$ *del polo* z *di u rispetto al triangolo proprio-coniugato comune a* C_1 *e* C_2.

Questa proprietà può servire a costruire linearmente il sistema polare di Ω, giacchè non sarebbe difficile indicare la costruzione lineare del punto z, anche quando il triangolo proprio-coniugato comune a C_1 e C_2 fosse ignoto.

È opportuno poi notare che, posto

$$\Phi = \Theta_2 u_\alpha^2 - 2\Theta_1 u_\varphi^2 + A_1 u_{\alpha'}^2$$

$$\Phi' = A_2 u_\alpha^2 - 2\Theta_2 u_\varphi^2 + \Theta_1 u_{\alpha'}^2,$$

la schiera

$$\mu_1 \Phi + \mu_2 \Phi' = 0$$

è quella delle coniche inscritte nel quadrilatero, i cui vertici sono i sei punti nei quali i lati del quadrangolo comune a C_1 e C_2 incontrano (fuori dei vertici) i lati del triangolo proprio-coniugato comune a C_1 e C_2.

Infatti si dimostra facilmente l' identità

$$(\lambda_2 - \lambda_3)^2 F_{\lambda_1} - (\lambda_3 - \lambda_1)^2 F_{\lambda_2} = \frac{3}{A_2}(\lambda_2 - \lambda_1)[\Phi + \lambda_3 \Phi'];$$

e d'altra parte si può provare che il 1° membro di questa identità rappresenta, quando è zero, due vertici opposti del quadrilatero in discorso.

Le coniche di questa schiera hanno quindi la notevole proprietà di essere le reciproche rispetto ad Ω di quelle del fascio $C_1 C_2$; la conica Ω è

quindi rispetto ad esse, come luogo, ciò che è, come inviluppo, rispetto alle coniche del fascio $C_1 C_2$.

La forma Ω è quella che si annulla identicamente se le coniche hanno due contatti distinti [nella forma canonica di Ω si è trascurato il fattore $(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)(m_1 - m_2)$], mentre le Φ, Φ' sono quelle forme che si annullano identicamente nel caso che C_1 e C_2 abbiano contatto tripunto (*).

La forma

$$\omega = (\Theta_1^2 - \Theta_2 A_1) A_2 a_x^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1 \Theta_2) f_x^2 + (\Theta_2^2 - \Theta_1 A_2) A_1 a_x'^2,$$

ove

$$f_x^2 = 3(\alpha \alpha' x)^2,$$

ha rispetto alle due forme u_α^2, $u_{\alpha'}^2$ la stessa struttura che ha Ω rispetto alle forme a_x^2, $a_x'^2$. Dunque *sarà* $\omega = 0$ *immaginaria allora ed allora soltanto che le quattro tangenti comuni a C_1 e C_2 siano reali.*

Reggio Emilia, luglio 1888.

G. SFORZA.

(*) Lindemann-Clebsch (Traduz. francese, vol. 1°, pag. 372).

DI UNA CERTA SUPERFICIE ALGEBRICA RAZIONALE.

Nota di **Alberto Brambilla**, a Napoli.

Adunanza del 26 agosto 1888.

1. In due Note pubblicate nei *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* (*) io ho fatto conoscere diverse proprietà della superficie, il cui punto corrente ha le coordinate espresse come segue:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta_1^n : \theta_2^n : \theta_3^n : \theta_4^n ,$$

dove θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 sono quattro parametri legati fra loro dall' unica identità

$$(2) \qquad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0.$$

Riguardando le θ_1, θ_2, θ_3 come coordinate di punto in un piano Π, quella superficie Φ riesce rappresentata punto per punto sopra Π e le imagini delle sezioni piane sono le curve del sistema lineare ∞^3

$$(3) \qquad \xi_1 \theta_1^n + \xi_2 \theta_2^n + \xi_3 \theta_3^n + \xi_4 \theta_4^n = 0.$$

(*) *Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto sul piano* — Serie IIª, vol. XXI: Nota Iª, fasc. VII; Nota IIª, fasc. X-XI; 1888.

Le rette $\theta_r = 0$ di Π sono imagini di curve Γ_r razionali d'ordine n di Φ, lungo le quali la superficie stessa è toccata con un contatto d'ordine $n - 1$ dalle facce $x_r = 0$ del tetraedro T di riferimento (*tetraedro principale*). Indichiamo tali quattro rette di Π con t_r, ed il punto $t_r t_s$ con k_{rs}: allora si vede che ogni retta di Π, che passi per k_{rs}, è imagine di una curva razionale di ordine n, la quale ha un contatto n-punto collo spigolo T_{rs} $(x_r = x_s = 0)$ del tetraedro principale in un punto K_{rs}, d'imagine k_{rs}, nel quale lo stesso spigolo ha simile contatto con Γ_r e con Γ_s. Tale curva è quindi piana ed il suo piano passa per T_{rs}. D'altronde questo piano sega Φ costantemente in n curve razionali d'ordine n (compresa quella considerata), che hanno un contatto n-punto con T_{rs} in K_{rs} e le cui imagini sono altrettante rette di Π formanti un gruppo dell'involuzione di grado n intorno a k_{rs} definita dai due raggi n-pli t_r, t_s.

2. Evidentemente la superficie Φ è dell'ordine n^2.

Essa possiede tre rette n-ple, che sono

$$D_1 = \overline{K_{23} K_{14}}, \qquad D_2 = \overline{K_{31} K_{24}}, \qquad D_3 = \overline{K_{12} K_{34}},$$

ed hanno per imagini le diagonali

$$d_1 = \overline{k_{23} k_{14}}, \qquad d_2 = \overline{k_{31} k_{24}}, \qquad d_3 = \overline{k_{12} k_{34}}$$

del quadrilatero $t \equiv (t_1 t_2 t_3 t_4)$. Tali rette n-ple concorrono in un punto O, quando n sia pari, e giacciono in un piano Ω, quando n sia dispari. Nel primo caso il punto O è multiplo secondo $3(n - 1)$ e nel secondo caso le tre rette n-ple formano un triangolo i cui vertici

$$O_1 = D_2 D_3, \qquad O_2 = D_3 D_1, \qquad O_3 = D_1 D_2$$

sono multipli secondo $2n - 1$ per la superficie Φ.

3. Sovra ciascuna retta n-pla sonvi ancora altri punti d'una multiplicità superiore ad n e di essi trattava in modo speciale la Nota II^a citata: ma i risultati ivi ottenuti, essendo esatti nel caso di n dispari,

vogliono essere modificati quando sia n numero pari. Esponiamo qui tale modificazione insieme a qualche altro fatto che ancora non avevamo enunciato.

4. La superficie Φ possiede, oltre le rette n-ple anzidette, delle curve doppie razionali d' ordine n, in parte gobbe ed in parte piane; queste ultime formano sei sistemi coordinati ai sei spigoli del tetraedro principale, in guisa che le curve di un sistema sono in piani passanti per lo spigolo coordinato. Indicheremo con V_{rs} una di queste curve coordinate allo spigolo T_{rs}: essa è rappresentata da due rette di Π aventi le equazioni della forma

$$(\varepsilon^{\lambda} - 1)\theta_r + (\varepsilon^{\mu} - 1)\theta_s = 0, \qquad (\varepsilon^{-\lambda} - 1)\theta_r + (\varepsilon^{-\mu} - 1)\theta_s = 0$$

rispettivamente, dove ε è una radice primitiva n^{ma} dell'unità, λ e μ sono due qualunque interi, che basta siano scelti nell'intervallo $1, 2, \ldots, n-1$.

Si designeranno tali rette, fra loro *congiunte*, coi simboli $v_{rs}(\lambda, \mu)$, $v_{rs}(-\lambda, -\mu)$. Esse non sono che casi particolari delle rette

$$u(\lambda, \mu, \nu) \equiv (\varepsilon^{\lambda} - 1)\theta_1 + (\varepsilon^{\mu} - 1)\theta_2 + (\varepsilon^{\nu} - 1)\theta_3 = 0,$$

$$u(-\lambda, -\mu, -\nu) \equiv (\varepsilon^{-\lambda} - 1)\theta_1 + (\varepsilon^{-\mu} - 1)\theta_2 + (\varepsilon^{-\nu} - 1)\theta_3 = 0,$$

imagini esse pure di curve doppie di Φ, ma gobbe.

5. Due rette $v_{rs}(\lambda, -\lambda)$, $v_{rs}(-\lambda, \lambda)$, fra loro congiunte, godono in particolare della proprietà di segare le due rette d non passanti per k_{rs} in punti che sono *congiunti* del punto d' incontro delle medesime, cioè, che sono imagini dello stesso punto di Φ rappresentato da questo ultimo, il quale è o non è congiunto agli altri due vertici del trilatero $d_1 d_2 d_3$ secondo che n è pari o dispari (*).

6. Supponghasi n pari: allora, se qrs è una qualunque permutazione

(*) Così, sulla superficie Φ il punto di concorso delle tre rette n-ple, n pari, è $3(n-1)$-plo; quello di concorso di due, per n dispari, è $(2n-1)$-plo.

dei numeri 1, 2, 3 e se $\nu = \frac{n}{2}$, i due piani

$$\theta_{rs} = x_r - x_s = 0, \qquad \theta_{q4} = x_q - x_4 = 0$$

segano ciascuno la superficie Φ nella retta n-pla D_q ed in una residua curva di ordine $n(n-1)$ rispettivamente. Quest'ultima si scinde necessariamente in tante curve d'ordine n, perchè ognuno di quei piani passa per uno spigolo del tetraedro principale, curve, che hanno per imagini altrettante rette del piano rappresentativo Π. Tali rette sono rispettivamente

$$(4) \qquad \theta_r - \varepsilon^\alpha \theta_s = 0, \qquad \theta_q - \varepsilon^\alpha \theta_4 = 0,$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

compresa in ciascuno dei due tipi la retta d_q (per $\alpha = \nu$). Ma si trova di leggeri che le due rette

$$\theta_r - \varepsilon^\beta \theta_s = 0, \qquad \theta_r - \varepsilon^{-\beta} \theta_s = 0,$$

ad esempio, non sono altro che le congiunte $v_{rs}(-\beta, \beta)$, $v_{rs}(\beta, -\beta)$ imagini di una curva doppia piana di Φ, passante pel punto O di concorso delle rette n-ple, e precisamente intersezioni ciascuna di due falde appartenenti alle rette n-ple D_r, D_s. Al medesimo tipo (4) a sinistra appartiene la retta

$$g_{rs} = \theta_r - \theta_s = 0$$

(per $\alpha = n$), la quale non è congiunta ad alcuna altra ed è perciò imagine di una curva semplice di Φ. In modo analogo si ragionerebbe per le rette del tipo (4) a destra: con che si perviene alla seguente proposizione. *Nel caso di n pari il piano determinato da un qualunque spigolo del tetraedro principale colla retta n-pla ad esso appoggiata sega ulteriormente la superficie Φ in $\frac{n-2}{2}$ curve doppie ed in una curva sem-*

plice tutte razionali e d'ordine n. (*) Indicheremo queste speciali curve doppie piane col simbolo $[V_n]$ e la curva semplice, che loro s'accompagna, con G_n.

7. Ogni piano, che passi per la retta D_q, sega ulteriormente Φ in una curva d'ordine $n(n-1)$, la cui imagine è variabile in un fascio d'ordine $n-1$. I punti base di questo fascio sono $n-2$ sovra d_r, $n-2$ sovra d_s, oltre il punto $o_q = d_r d_s$, mentre gli altri $(n-2)^2$ formano la completa intersezione dei due tipi di rette v sotto (4). Tali punti sono necessariamente imagini di punti della retta D_q di multiplicità superiore ad n: essi coincidono coi punti, che nella Nota II^a citata indicammo colla lettera H e che credemmo fossero imagini di punti $(n+2)$-pli, sulla quale affermazione qui ritorniamo.

8. Vedemmo già nella Nota I^a che due rette v congiunte segano une coppia analoga opposta (dicendo *opposte fra loro* una retta v_{rs} ed una v_{q4}) in una quaderna di punti congiunti. Nel caso attuale (n pari) si trova facilmente che i quattro punti H, centri dei fasci

$$
(5)\quad
\begin{array}{ll}
u(\lambda_1, \lambda_2 + \mu, \lambda_3 + \mu), & u(-\lambda_1, \mu' - \lambda_2, \mu' - \lambda_3), \\
u(\lambda_1, \mu'' - \lambda_2, \mu'' - \lambda_3), & u(-\lambda_1, \lambda_2 + \mu''', \lambda_3 + \mu'''),
\end{array}
$$

dove λ_1, λ_2, λ_3 sono interi fissati e μ, μ', μ'', μ''' sono interi variabili nel campo $1, 2, \ldots, n$, sono congiunti fra loro e ad un gruppo di n punti (*ennupla*) della retta d_1, il quale è sezione comune di quei quattro fasci con questa retta.

D'altronde quei medesimi quattro punti formano la completa intersezione della coppia di rette

$$v_{23}(\lambda_2 - \lambda_3 + \nu, \lambda_3 - \lambda_2 - \nu), \qquad v_{23}(\lambda_3 - \lambda_2 - \nu, \lambda_2 - \lambda_3 + \nu)$$

(*) *Nel caso di n dispari ogni piano conjugato armonico di quello determinato da uno spigolo e dalla retta n-pla di Φ ad esso appoggiata rispetto alle facce del tetraedro principale passanti per quello spigolo, sega la superficie Φ secondo una curva semplice ed* $\frac{n-1}{2}$ *curve doppie razionali e d'ordine n.*

colla coppia opposta $v_{14}(\lambda_1 - \nu, \nu - \lambda_1)$, $v_{14}(\nu - \lambda_1, \lambda_1 - \nu)$. che sono due coppie opposte qualunque di rette $v(\alpha, -\alpha)$ congiunte. Ciò prova anzitutto la precedente asserzione, che due rette v opposte del tipo $v(\alpha, -\alpha)$ si segano in un punto H, qualora non s' incontrino sopra una retta d. Dunque le $n-2$ *rette* $v_{rs}(\alpha, -\alpha)$ *segano le opposte* $n-2$ *rette* $v_{q4}(\alpha, -\alpha)$ *in* $(n-2)^2 - 2(n-2) = (n-2)(n-4)$ *punti* H_q *distinti in* $\dfrac{(n-2)(n-4)}{4}$ *quaderne, ognuna delle quali è congiunta ad una ennupla sopra* d_q. Per conseguenza *sopra ogni retta n-pla di* Φ *esistono* $\dfrac{(n-2)(n-4)}{4}$ *punti* $(n+4)$ pli.

Sopra ogni curva doppia piana del tipo $[V_{rs}]$ *esistono* $\dfrac{n-4}{2}$ *punti* $(n+4)$*-pli di* Φ *siti sulla retta n-pla* D_q, *i quali sono doppi per la curva stessa : per ognuno di tali punti passa* (pure con due rami) *una curva* $[V_{q4}]$ *i cui punti doppi,* $(n+2)$*-pli per* Φ *sopra* D_q, *sono distribuiti uno ad uno sovra le* $\dfrac{n-4}{2}$ *curve* $[V_{rs}]$, *le cui imagini non segano le imagini della* $[V_{q4}]$ *sopra* d_r *o* d_s.

9. Non tutti i punti H_q sono peraltro intersezioni di due rette $v_{rs}(\alpha, -\alpha)$, $v_{q4}(\beta, -\beta)$. Ed invero, mentre due fasci (5) di una stessa orizzontale sono congiunti fra loro, epperò fra loro diversi, essi ponno coincidere coi due rimanenti : ciò accade quando sia $\lambda_q = \nu$, oppure $\lambda_r = \lambda_s + \nu$. Nel primo caso, i centri dei due fasci sono le tracce delle rette $v_{rs}(\lambda_r - \lambda_s + \nu, \lambda_s - \lambda_r - \nu)$, $v_{rs}(\lambda_s - \lambda_r - \nu, \lambda_r - \lambda_s + \nu)$ sopra la g_{q4}; nel secondo, tali centri sono le tracce delle $v_{q4}(\lambda_q - \nu, \nu - \lambda_q)$, $v_{q4}(\nu - \lambda_q, \lambda_q - \nu)$ sopra la g_{rs}. In ciascuno dei due casi, i due centri sono congiunti ad una ennupla di punti sovra d_q ed a nessuno altro punto.

Ne segue che *sopra ogni retta n-pla* D_q *di* Φ *esistono* $\dfrac{n+2}{2}$ *punti* $(n+2)$*-pli della superficie, doppi per la curva* G_{rs} *e semplici uno ad una per ciascuna curva* $[V_{q4}]$; *ed altri* $\dfrac{n-2}{2}$ *punti* $(n+2)$*-pli di* Φ, *doppi per la curva* G_{q4} *e semplici uno ad una per ciascuna curva* $[V_{rs}]$.

10. Le due specie di punti H sono ancora caratterizzate da altra proprietà. Nella Nota II^a si è osservato come pel punto $H_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, centro del fascio $u_1(\lambda_1, \lambda_2 + \mu, \lambda_3 + \mu)$ passi la retta

$$u(2\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1),$$

che è manifestamente del tipo $u(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ e che unisce quindi un punto della retta d_2 ad uno della d_3, congiunti, dei vertici del trilatero $d_1 d_2 d_3$ (*). Ora si può notare che tali rette $u(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ sono in numero di $(n-2)(n-4)$, se si escludono da esse le rette $v_{23}(\alpha, -\alpha)$ e $v_{14}(\alpha, -\alpha)$: facilmente poi si verifica essere i punti H della prima specie dotati della proprietà di appartenere ciascuno *univocamente* ad una di queste rette u. Epperò, osservando che la congiunta della retta anzidetta passa per $H_1(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$ e che per i due punti H rimanenti, congiunti tali punti H, passano due rette $u(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ fra loro congiunte, si potrà concludere che *per un punto $(n + 4)$-plo di Φ passano due curve doppie gobbe, le quali hanno un punto doppio nel punto di concorso delle rette n-ple e sono intersezioni di falde, che appartengono alle due rette n-ple non contenenti quel punto $(n + 4)$ plo.*

Ma per un punto H_q della seconda specie la curva u del tipo sopraindicato si riduce alla $v_{rs}(\alpha, -\alpha)$, se è $\lambda_q = \nu$, od alla g_{q4}, se è $\lambda_3 = \lambda_2 + \nu$. I quali due casi sono diversi soltanto per la diversa notazione adottata ed essenzialmente si riducono alla scomparsa della retta $u_{qrs}(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ in parola (**), mentre le due rette $v(\alpha, -\alpha)$, g appartengono sempre a tal punto H_q. Per un punto $(n + 2)$-plo di Φ dobbiamo dunque dire solamente che non esistono curve doppie passanti per esso analoghe alle ultime indicate per un punto $(n + 4)$ plo.

11. Finalmente non perdiamo di vista che per un punto $(n + 4)$-plo passano $2n$ curve doppie ulteriori, di cui 8 sono piane ed appartengono due a due ai piani, che dal punto $(n + 4)$-plo projettano gli spi-

---

(*) Vedasi: Nota I^a, n.° 15.

(**) Sotto $u_{qrs}(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ intendiamo la retta u per la quale si hanno $\lambda_q = \alpha + \beta$, $\lambda_r = \alpha$, $\lambda_s = \beta$.

goli del tetraedro principale, non appoggiati alla retta n-pla, che contiene tal punto; mentre per un punto $(n + 2)$-plo passano ulteriormente soltanto n curve doppie, di cui 4 sono piane e situate una ad una nei piani analoghi ai precedenti. Il punto $(n + 4)$-plo od $(n + 2)$-plo è doppio per ognuna di queste nuove curve doppie.

Bergamo, Giugno 1888.

A. BRAMBILLA.

ESTRATTI DAI VERBALI (*)

ADUNANZA DELL' 8 LUGLIO 1883

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza: Il prof. *G. Sforza* ringrazia per la sua ammissione a socio non residente del Circolo.

La *K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* accetta il cambio delle proprie pubblicazioni coi *Rendiconti* del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª: *Bibliot. Matem.*).

III. — Ammissione di nuovi soci: Dietro votazione a schede segrete il prof. comm. *Filippo Gambardella* (Livorno), proposto dai soci Lazzeri e Bassani, è eletto *socio non residente*.

IV. — Memorie e Comunicazioni:

VIVANTI. — Sulle funzioni ad infiniti valori.

DEL PEZZO. — Estensione di un teorema di Noether.

TORELLI. — Della trasformazione cubica di una forma binaria cubica.

ADUNANZA DEL 22 LUGLIO 1883

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza: Il prof. comm. *Gambardella* ringrazia per la sua ammissione a socio non residente del Circolo. — La *British Association for the Advancement of Science* accetta il cambio delle proprie pubblicazioni coi *Rendiconti* del Circolo.

II. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª: *Bibliot. Matem.*).

III. — Memorie e Comunicazioni:

SFORZA. — Condizione geometrica per la realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche.

GUCCIA. — Nuovi teoremi sui punti singolari delle curve algebriche piane.

(*) ERRATA-CORRIGE a pag. 152, Adunanza del 10 giugno 1883:

IV. — Ammissione di nuovi soci: Dietro votazione a schede segrete, il dottor *Adolfo Merlani* (Bologna), proposto dai soci Pincherle e Guccia, è eletto *socio non residente*.

ADUNANZA DEL 12 AGOSTO 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Corrispondenza :

La *Royal Society* di Londra aderisce al cambio delle proprie pubblicazioni : *Philosophical Transactions* (*Series* A) e *Proceedings*, coi *Rendiconti* del Circolo.

Il Rettore della R. Università di Bologna ringrazia il Circolo per avere, coll' invio dei suoi Delegati, efficacemente contribuito ad accrescere lustro alla grande solennità dell' VIII° Centenario dello Studio Bolognese.

A nome della Commissione istituita dalla Società Matematica di Francia per il *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*, il presidente, signor prof. *H. Poincaré*, invita il Circolo ad assumere la parte del lavoro che riguarda la produzione matematica italiana. Il Circolo delibera di ringraziare la Commissione del Repertorio Bibliografico e di accettare l'onorevole invito.

II. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª: *Bibliot. Matem.*).

III. — Ammissione di nuovi soci : Dietro votazioni a schede segrete i signori : *Salvatore Conigliaro* ed *Enrico Morisani*, proposti dai soci M. L. Albeggiani e Guccia, sono eletti *soci residenti*, ed il sig. dott. *Enrico Amaturo* (Napoli), proposto dai soci Del Re e Guccia, è eletto *socio non residente*.

IV. — Memorie e Comunicazioni :

SEGRE. — Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori.

VIVANTI. — Ancora sulle funzioni ad infiniti valori.

ADUNANZA DEL 26 AGOSTO 1888

PRESIDENZA M. GEBBIA

I. — Corrispondenza.

II. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª : *Bibliot. Matem.*).

III. — Ammissione di nuovi soci : Dietro votazioni a schede segrete sono eletti *soci non residenti* i signori : prof. *Ernesto Basile* (Roma), proposto dai soci Guccia e M. L. Albeggiani ; prof. *Giuseppe Fatta*

(Petralia Sottana), proposto dai soci M. L. Albeggiani e Mastricchi; prof. *Giovanni Russo* (Catanzaro), proposto dai soci M. L. Albeggiani e Guccia.

IV. — Memorie e Comunicazioni :

BRAMBILLA. — Di una certa superficie algebrica razionale.

GEBBIA. — Sul teorema di Betti (Rivista bibliografica).

ADUNANZA (STRAORDINARIA) DEL 9 SETTEMBRE 1888

PRESIDENZA G. GUIDOTTI

I. — Affari interni del Circolo.

II. — Corrispondenza : Il prof. *G. Russo* ringrazia per la sua ammissione a socio non residente.

III. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª: *Bibliot. Matem.*).

IV. — Ammissione di nuovi soci : Dietro votazioni a schede segrete sono eletti : il Barone *Francesco Tomasini*, proposto dai soci Macaluso e Mastricchi, *socio residente*; il prof. *Giovanni Bordiga* (Venezia), proposto dai soci Loria e Guccia, ed il prof. *Nicodemo Jadanza* (Torino), proposto dai soci Segre e Peano, *soci non residenti.*

V. — Memorie e Comunicazioni :

MARCOLONGO. — Sulla variazione di un integrale definito e sulla teoria delle equazioni a derivate parziali del primo ordine.

ADUNANZA (STRAORDINARIA) DEL 14 OTTOBRE 1888

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

I. — Affari interni del Circolo : Dietro discussione rimane approvato il Regolamento speciale della Biblioteca (a' sensi dell'art. 38 dello Statuto), il quale andrà in vigore a partire dal 1° gennajo 1889.

II. — Corrispondenza : Il prof. *N. Jadanza* ringrazia per la sua ammissione a socio non residente.

III. — Presentazione di pubblicazioni (Vedi la parte 2ª: *Bibliot. Matem.*).

IV. — Ammissione di nuovi soci : Dietro votazioni a schede segrete i signori : prof. *Ludwig Bresslau*, proposto dai soci Mastricchi e Guccia, e prof. *Luigi Certo*, proposto dai soci Guccia e Pepoli, sono eletti *soci residenti*, ed il signor *Carmelo Previtera* (Linguaglossa), proposto dai soci Platania e Mastricchi, è eletto *socio non residente.*

V. — Memorie e Comunicazioni :

MARCOLONGO. — Teoremi di Meccanica.

PEANO. — Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie.

LORIA. — Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n-1$ dimensioni.

GUCCIA. — Nuovi teoremi sui punti singolari delle curve algebriche piane (Continuazione).

PEPOLI. — Su alcuni enti generati da tre sistemi riferiti l'uno all'altro per mezzo di trasformazioni Cremoniane.

GIUDICE indicando con D_n il numero dei termini d'un determinante ad elementi principali nulli, indipendenti e diversi da zero gli altri elementi, perviene alle formole simboliche :

$$(1 + D)^n = \Gamma(n + 1), \qquad e^{Dx} = \frac{e^{-x}}{1 - x};$$

e dà pure la formola

$$D_m = m D_{m-1} + (-1)^m.$$

PEANO. — *Sulla risposta del prof. Giudice contenuta in questi Rendiconti a pag. 94.*

Ho nulla ad aggiungere a quanto dissi a pag. 94 di questi *Rendiconti* sulla Nota del sig. prof F. Giudice a pag. 28. Credo parimenti inutile confutare la sua risposta a pag. 94.

Però, siccome le citazioni contenute in questa risposta potrebbero trarre qualcuno in inganno , stimo conveniente rilevare l' infedeltà di alcune di esse.

Il prof. Giudice cita (Dini, *Fondamenti*, ecc. , § 44) la proposizione :

Due funzioni continue in un intervallo , eguali per tutti i valori razionali della variabile sono eguali per tutti gli altri valori.

Ma, riportandola, sopprime la condizione della continuità; e vi aggiunge : *ove dicendo che due funzioni hanno egual valore si intenda che...* Ora quella soppressione rende falsa la proposizione ; questa aggiunta tende a stabilire una distinzione che non sussiste.

Il sig. Giudice cita pure la proposizione (*ivi*, § 43) che , nel nostro caso si enuncia :

Se due funzioni sono continue in un certo intervallo, e sono eguali nei punti d' un gruppo infinito G, esse sono anche eguali nei punti dei gruppi derivati di G.

Ma riportandola, sopprime la condizione della continuità delle funzioni, e vi sostituisce l'eguaglianza delle derivate nei punti dello stesso gruppo *G*. Con queste modificazioni la proposizione è pure falsa.

GIUDICE. — *Per una Comunicazione che mi riguarda.*

Sono certo che chiunque avesse letta la mia Nota (*) e poi la mia risposta ad osservazioni fattemi (**), si sarebbe accorto che per puro caso io non aveva scritta la parola che fu causa della osservazione del prof. Peano: ne sono certo perchè in quella mia Nota ho parlato sempre di funzioni continue, anzi derivabili che è più. Ringrazio tuttavia il professore che rileva l'omissione; ma respingo la taccia d' infedeltà; è troppo prezioso il libro del Dini perchè chicchessia possa volerlo toccare; non è infedele chi manda, con indicazioni precise, all'originale.

Aveva scritta la mia Nota per procurarmi l'occasione di presentare velato un dubbio che non ardiva gettare chiaramente d'un tratto, e di mostrare che negli sviluppi delle funzioni circolari compare una vera costante arbitraria.

Le osservazioni fattemi m'obbligarono a dichiarare apertamente il mio dubbio che si esprime con questa domanda : « Sono possibili funzioni aventi sempre egual valore in un intervallo nel quale non son « sempre identiche; sono possibili, p. es., due funzioni derivabili in un « intervallo aventi in esso sempre egual valore e non sempre egual « derivata, oppure d'egual valore sebbene l'una sempre e l' altra non « sempre derivabile » ? Sarei lieto d'aver risposta indiscutibile , affermativa o negativa non m' importa. È soltanto per alludere sempre a questo dubbio, tutto mio, che ho scritto ciò che si legge nelle ultime tre linee della pagina 94 dei *Rendiconti* di quest'anno.

G. B. G. M. L. A.

(*) Questi *Rendiconti* (t. II) pag. 28. (**) *Ibid.* pag. 94.

TEOREMI SU MASSIMI E MINIMI GEOMETRICI,

E SU NORMALI A CURVE E SUPERFICIE.

Nota del prof. **G. Peano**, a Torino.

Adunanza del 14 ottobre 1888.

Le proposizioni che seguono permettono di risolvere alcuni problemi di geometria infinitesimale con procedimenti basati sulla composizione di segmenti, sui baricentri, e così via. Alcune di esse sono note; ma credetti utile l'enunciarle onde far meglio scorgere la loro analogia colle seguenti, che ritengo nuove. Tutte queste proposizioni sono conseguenza di formule ottenute nel mio opuscolo *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*. La loro dimostrazione può essere un utile esercizio per gli studiosi.

I.

Se $r_1, r_2, \ldots$ sono le distanze d'un punto variabile P dello spazio da punti, rette e piani fissi, e $f(r_1, r_2, \ldots)$ è una loro funzione analitica, allora la normale alla superficie luogo dei punti P per cui f è costante ha la direzione della risultante di forze applicate al punto considerato P, dirette ai punti fissi, o normalmente alle rette e piani fissi, ed eguali a $\frac{df}{dr_1}, \frac{df}{dr_2}, \ldots$

Si suppone che il punto P non coincida con alcuno dei punti dati, nè giaccia su alcuna delle rette o piani dati; inoltre che la risultante di quelle forze non sia nulla.

Se per un punto P dello spazio, non giacente in alcuno dei punt rette o piani dati, f diventa massima o minima, la risultante di quell forze è nulla.

Questa proposizione trovasi accennata nelle opere di Leibniz (* Essa fu chiaramente enunciata dal Poinsot (**); e fu in seguito og getto di studio di molti matematici. La risultante considerata, cambiat di segno, è il parametro differenziale del Lamé.

II.

Se, nello spazio, $r_1, r_2, \ldots$ sono le distanze d'un piano variabile da punti fissi, e $f(r_1, r_2, \ldots)$ è una loro funzione analitica, l'equazio $f =$ costante determina un inviluppo di piani. Se π è un piano d l'inviluppo, il punto di contatto di esso colla superficie inviluppata il baricentro dei piedi delle perpendicolari abbassate dai punti dati s piano π, ai quali siano affissi pesi eguali a $\frac{df}{dr_1}, \frac{df}{dr_2}, \ldots$

Si suppone che questo piano non passi per alcuno dei punti da e che la somma dei pesi non sia nulla.

E se, per una posizione speciale del piano π, la funzioue f venta massima o minima, il sistema di forze applicate al piano π co a corpo rigido, dirette secondo le normali abbassate dai punti dati s piano π, ed eguali a $\frac{df}{dr_1}, \frac{df}{dr_2}, \ldots$, è in equilibrio.

La prima parte di questa proposizione fu enunciata da P. Serre Si ha una proposizione analoga, più semplice, per le rette d'un pian fisso. La proposizione corrispondente per le rette dello spazio è la se guente:

III.

Se p è una retta dello spazio, $r_1, r_2, \ldots$ le sue distanze da punti fissi, si immaginino le forze F, applicate alla retta p, giacenti lungo le normali abbassate dai punti dati sulla retta p, e in grandezza eguali

(*) *Math. Schriften*, Berlin 1849, tomo VI, pag. 233.
(**) *Statique*, Bruxelles 1836, pag. 291.

a $\frac{df}{dr_1}$, $\frac{df}{dr_2}$, ... Le rette p per cui f è costante formano un complesso.

Le rette del complesso giacenti in un piano π inviluppano una linea. Se p è una retta siffatta, per trovarne il punto di contatto coll' inviluppo, si proiettino normalmente le forze F sul piano π, e si compongano considerandole applicate alla retta p, come corpo rigido. Il punto d' applicazione della risultante sarà il punto cercato.

Le rette del complesso passanti per un punto P formano un cono. Per trovare un piano normale a questo cono lungo una generatrice p, si decomponga ogni forza F in una forza passante per P ed in una coppia, e si compongano queste varie coppie. Il piano passante per P e parallelo alla coppia risultante sarà il piano cercato.

Se, per una posizione della retta p nello spazio, la funzione f diventa massima o minima, le forze F si fanno equilibrio.

IV.

Se, nello spazio, p è una retta passante per un punto fisso P, e faciente gli angoli α_1, α_2, ... con rette fisse, che possiamo supporre pure passanti per P, il luogo delle rette p, per cui è costante una funzione analitica $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ di questi angoli, è un cono.

Si immaginino coppie di forze giacenti nei piani passanti per la retta p e per ognuna delle rette fisse, ed eguali a $\frac{df}{d\alpha_1}$, $\frac{df}{d\alpha_2}$, ... Il piano normale al cono considerato lungo la generatrice p è parallelo alla risultante di queste coppie. Se per una retta p, f è massimo o minimo, questa risultante è nulla.

V.

Se un punto P si muove nello spazio in guisa che rimanga costante il volume del solido formato dalle piramidi aventi per vertice P e per basi le faccie d'una superficie poliedrica aperta, esso descrive un piano. Questo piano è normale alla risultante dei segmenti diretti da P normalmente alle faccie del poliedro, e proporzionali a queste faccie stesse.

Questa proposizione è dovuta a Steiner.

VI.

Se un punto P si muove in guisa che rimanga costante l' area della superficie poliedrica formata dai triangoli aventi per vertice P e per basi i lati d'una linea poligonale data, esso descrive una superficie. La normale a questa superficie è diretta secondo la risultante delle forze applicate in P, dirette normalmente ai lati della linea poligonale, e proporzionali a questi lati. Se per un punto P l'area è minima, questa risultante è nulla.

Nei due ultimi esercizii alla superficie poliedrica e alla linea poligonale si possono sostituire una superficie ed una linea qualunque.

VII.

Abbiasi nello spazio una superficie σ fissa, ed un piano variabile π che incontri la superficie σ secondo una linea chiusa.

Se il piano π si muove in guisa che il volume limitato dal piano π e dalla superficie σ sia costante, il punto di contatto del piano π coll' inviluppo è il baricentro dell'area piana limitata dall' intersezione di questo piano colla superficie.

Se il piano π si muove in guisa che risulti costante l'area piana limitata dall' intersezione del piano colla superficie, il punto di contatto del piano π coll' inviluppo è il baricentro della linea d' intersezione di π colla superficie data, supposto che la densità in un punto qualunque di questa linea sia proporzionale alla cotangente dell'angolo che il piano tangente alla superficie in quel punto fa col piano π.

Se il piano π si muove in guisa che risulti costante la lunghezza della linea sezione di esso piano colla superficie data, il punto di contatto di π col proprio inviluppo è il baricentro della linea sezione, ove si supponga la densità in un punto qualunque proporzionale al prodotto della cotangente dell' angolo che il piano tangente alla superficie fa col piano secante, moltiplicata per la curvatura della curva sezione.

Torino, ottobre 1888.

G. Peano.

TEOREMA DI MECCANICA

Nota del dott. **R. Marcolongo**, a Roma.

Adunanza straord. del 14 ottobre 1888.

È noto il seguente teorema :

Qualunque problema di meccanica nel quale sussiste il principio della conservazione delle forze vive e delle aree e nel quale la posizione geometrica del sistema dipende da tre quantità è riducibile alle quadrature. (*)

Seguendo un metodo completamente simile a quello col quale si stabilisce il teorema precedente se ne dimostra un altro analogo che ha pure qualche interesse.

Supponiamo che in un problema di meccanica oltre l' integrale delle forze vive :

$$f = a$$

sussista l' integrale delle aree nel piano yz, cioè :

$$H_1 = \sum m(yz' - y'z) = a_1$$

(*) Cfr. J a c o b i : *Nova methodus, æquationes differentiales partiales primi ordinis etc integrandi* (*Crelle's Journ.* vol. 60, p. 149).

e l'integrale del centro di gravità rispetto ad uno degli assi di questo piano p. e. rispetto all'asse delle z, e sia:

$$\varphi = \sum' m z' = \text{cost.}$$

Sussisterà pure l'integrale del centro di gravità relativo all'altro asse dello stesso piano; cioè sarà:

$$\psi = \sum' m y' = \text{cost.} \quad (*).$$

Teniamo inoltre presente che hanno luogo le seguenti identità:

$$[H_1, \varphi] = -\psi, \qquad [H_1, \psi] = \varphi.$$

Volendo risolvere il problema di meccanica dovremo integrare la equazione alle derivate parziali

$$f = a$$

in cui al posto di mx', my', mz', s'intendano rispettivamente sostituite

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Dovremo in primo luogo trovare una funzione H tale che sia

$$[f, H] = 0.$$

È facile convincersi che possiamo prendere $H = H_1$.

(*) Cfr. l. c. pag. 107, ed una mia nota: *Sul teorema di Poisson* inserita nei *Rendiconti della R. Accad. di Napoli* (Settembre 1888).

Poi dobbiamo procurarci una nuova funzione H_2 che sia soluzione comune del sistema jacobiano:

$$[f, H_2] = 0, \qquad [H_1, H_2] = 0 .$$

La funzione φ è una nuova soluzione della prima come pure la combinazione:

$$[H_1, \varphi] = -\psi = A_1$$

mentre la combinazione:

$$[H_1, -\psi] = -\varphi = A_2$$

riproduce la funzione φ; cerchiamo adunque di soddisfare alla seconda delle equazioni poste con una funzione di: f; φ; A_1. Sia essa:

$$F = F(f, \varphi, A_1).$$

La F dovrà soddisfare alla:

$$[H_1, F] = 0 ,$$

cioè:

$$[H_1, f]\frac{\partial F}{\partial f} + [H_1, \varphi]\frac{\partial F}{\partial \varphi} + [H_1, A_1]\frac{\partial F}{\partial A_1} = 0$$

od ancora:

$$A_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + A_2 \frac{\partial F}{\partial A_1} = 0.$$

Basterà quindi procurarci un integrale del sistema:

$$\frac{d\varphi}{A_1} = \frac{dA_1}{A_2} \quad \text{oppure:} \quad -\frac{d\varphi}{\psi} = \frac{d\psi}{\varphi};$$

onde potremo prendere:

$$H_2 = \varphi^2 + \psi^2 = a_2 .$$

Ecco dunque trovate le due funzioni H_1, H_2. E ciò vale generalmente.

Se ora si suppone che la posizione dei punti del sistema dipenda da tre sole quantità, è chiaro che per la risoluzione del problema avremo solamente bisogno delle equazioni:

$$f = a, \qquad H_1 = a_1, \qquad H_2 = a_2,$$

dalle quali ricaveremo le p_1, p_2, p_3 (per tenere le ordinarie notazioni di Jacobi) in funzione di q_1, q_2, q_3 e delle costanti a, a_1, a_2. Costruita quindi la funzione:

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3)$$

otterremo gli ulteriori integrali del problema mediante le equazioni:

$$t + b = \frac{\partial V}{\partial a}, \qquad b_1 = \frac{\partial V}{\partial a_1}, \qquad b_2 = \frac{\partial V}{\partial a_2},$$

essendo b, b_1, b_2 nuove costanti arbitrarie.

Potremo adunque concludere che:

Ogni problema di meccanica nel quale la posizione geometrica del sistema dipende da tre sole quantità e nel quale sussista: 1° l'integrale delle forze vive: 2° uno degli integrali delle aree; 3° uno degli integrali del centro di gravità relativo ad uno degli assi del piano su cui ha luogo il teorema delle aree, è riducibile alle quadrature.

Roma, settembre 1888.

R. Marcolongo.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Par M. H. Poincaré, à Paris.

(*Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia*).

Adunanza dell'11 novembre 1888.

. . . .

La lecture de la Note de M. Vivanti dans un des derniers numéros des *Rendiconti*, m'a vivement intéressé et m'a inspiré diverses réflexions qu'il ne sera peut-être pas inutile de mettre sous les yeux de vos lecteurs.

D'après M. Vivanti, une fonction multiforme est de la $n^{\text{ème}}$ puissance, si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre pour une valeur donnée de la variable, est lui-même de la $n^{\text{ème}}$ puissance, au sens de M. Cantor. En particulier, elle sera de la $1^{\text{ère}}$ puissance si elle peut prendre en un point donné une infinité de valeurs susceptibles d'être rangées en une série linéaire:

$$y_1,\quad y_2, \ldots,\quad y_n, \ldots,$$

de façon que chacune d'elles se trouve dans cette série une fois, et une seule, avec un indice déterminé; si, en d'autres termes, on peut assigner à chacune de ces valeurs un numéro d'ordre. Au contraire une fonction qui pourrait prendre en un point donné, par exemple, toutes

les valeurs possibles commensurables ou non, ou encore toutes les valeurs incommensurables, serait de la 2de puissance.

Je me propose d'établir qu'il n'y a pas de fonction *analytique* multiforme d'une puissance supérieure à la 1ère. Mais pour cela il faut bien s'entendre sur ce qu'on doit appeler fonction analytique.

J'adopterai la définition de M. Weierstrass.

Un élément de fonction analytique sera une série de puissances convergente à l'intérieur d'un certain cercle. Deux éléments de fonctions seront la continuation analytique l'un de l'autre, ou, plus brièvement, seront *dérivés* l'un de l'autre quand les deux cercles de convergence ont une partie commune et que dans cette partie commune les deux séries ont même somme.

Pour construire une fonction analytique, nous partirons d'un élément de fonction F_0 convergent dans un certain cercle C_0. Nous construirons ensuite les divers éléments de fonction F_1 dérivés de F_0; puis les éléments F_2 dérivés des divers éléments F_1; puis les éléments F_3 dérivés de F_2, et ainsi de suite.

L'ensemble des éléments F_1, celui des éléments F_2, etc. sont de la 2de puissance. Mais il n'est pas nécessaire d'envisager tous ces éléments pour obtenir toutes les déterminations de la fonction.

J'appellerai F'_i ceux des éléments F_i dont le cercle de convergence C'_i aura pour centre un point ayant ses deux coordonnées commensurables.

Il est aisé de vérifier que l'ensemble des éléments F'_1 est de la 1ère puissance (et qu'il en est de même de l'ensemble des éléments F'_{i+1} dérivés d'un élément F_i donné).

On voit aussi sans peine que tout point intérieur à l'un des cercles de convergence C_1 de l'un des éléments F_1 sera aussi intérieur à l'un des cercles de convergence C'_1 de l'un des éléments F'_1.

Tout cercle ayant une partie commune avec l'un des cercles C_1 aura aussi une partie commune avec un des cercles C'_1. Donc, tout élément dérivé de l'un des éléments F_1 sera aussi dérivé de l'un des éléments F'_1. Les divers éléments F'_2 sont donc dérivés des divers éléments F'_1; de même les éléments F'_3 seront dérivés des éléments F'_2, etc.

La considération des éléments F'_1, F'_2, F'_3, etc. suffit pour obte-

nir toutes les déterminations de la fonction. Soit en effet AMB un chemin quelconque allant de la valeur initiale A de la variable à la valeur finale B. Il existera un nombre *fini* d'éléments $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$ ayant pour cercles de convergence $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ et tels que F_{i+1} soit dérivé de F_i, que le point A soit intérieur à C_0 et le point B à C_n et que l'arc AMB traverse successivement le cercle C_0, la partie commune à C_0 et C_1, le cercle C_1, la partie commune à C_1 et C_2, etc., sans jamais sortir de l'ensemble des $n+1$ cercles $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Ce n'est qu'à cette condition que la fonction aura une valeur déterminée au point B quand on sera arrivé en ce point par le chemin AMB.

Nous pourrons alors remplacer $F_0, F_1, \ldots, F_n$, par $n+1$ éléments $F_0, F'_1, \ldots, F'_n$ qui en diffèrent assez peu pour que l'arc AMB ne sorte pas de l'ensemble des $n+1$ nouveaux cercles de convergence $C_0, C'_1, \ldots, C'_n$.

La considération de ces éléments F'_i suffit donc pour faire connaître la valeur qu'acquiert la fonction quand on a parcouru le chemin AMB. C.Q.F.D.

L'ensemble des éléments $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ etc. est de la 1ère puissance.

En effet, l'ensemble des éléments F'_1, dérivés de F_0, est de la 1ère puissance; donc on peut attribuer à chacun d'eux un numéro d'ordre α_1. L'ensemble des éléments F'_2, dérivés de celui des éléments F'_1 qui a pour numéro d'ordre α_1, sera encore de la 1ère puissance, donc on peut donner à chacun d'eux un numéro d'ordre α_2, et ainsi de suite.

En résumé, un élément F'_n sera défini par n numéros d'ordre :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

De sorte que l'ensemble des éléments $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ etc. aura même puissance que l'ensemble des fractions continues limitées :

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_n}}},$$

ou que l'ensemble des nombres commensurables, lequel est comme on sait de la 1ère puissance. C. Q. F. D.

Il suit de là que *l'ensemble des déterminations d'une fonction analytique en un point donné est toujours, au plus, de la 1ère puissance.*

Il n'existe donc pas, par exemple, de fonction analytique qui prenne en un point donné toutes les valeurs possibles commensurables ou non.

Paris, le 27 octobre 1888.

POINCARÉ.

INTORNO ALLE CURVE RAZIONALI D'ORDINE n DELLO SPAZIO A $n-1$ DIMENSIONI,

di **Gino Loria**, a Genova.

Adunanza straord. del 14 ottobre 1888.

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE $C_{1,n,n-1}$ RAZIONALI.

1. Nello spazio lineare a $n-1$ dimensioni S, $n-2$ fasci di primo ordine di spazii a $n-2$ dimensioni S_{n-2} e uno di secondo ordine, generano colle mutue intersezioni degli elementi corrispondenti una curva razionale d'ordine n $C_{1,n,n-1}$. (*)

Se con $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ si designano le coordinate omogenee di un punto di S e con λ un parametro, le coordinate di un punto qualunque della curva si potranno esprimere nel seguente modo:

$$\rho x_i = \sum_{r=0}^{r=n} a_{i,r} \lambda^r \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{1}$$

ρ essendo un fattore di proporzionalità.

Presi ad arbitrio n punti della curva corrispondenti ai valori $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$

(*) Seguendo l'esempio del sig. E. H. Moore (*Transactions of the Connecticut Academy*, Vol. VII, 1885) indichiamo con $S_{r,n,k}$ uno spazio a r dimensioni, d'ordine n, contenuto in uno spazio lineare a k dimensioni e non in uno meno esteso.

del parametro λ, affinchè essi appartengano a un S_{n-2} è necessario
sufficiente che sussista la relazione

$$\begin{vmatrix} \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r}\lambda_0^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r}\lambda_0^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r}\lambda_0^r \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r}\lambda_1^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r}\lambda_1^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r}\lambda_1^r \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r}\lambda_{n-1}^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r}\lambda_{n-1}^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r}\lambda_{n-1}^r \end{vmatrix} = 0;$$

questa può scriversi

$$\begin{Vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_0^n & \lambda_0^{n-1} & \dots & 1 \\ \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{n-1}^n & \lambda_{n-1}^{n-1} & \dots & 1 \end{Vmatrix} =$$

ma i determinanti estratti dalla seconda matrice valgono, a meno
fattore

$$\begin{vmatrix} \lambda_0^{n-1} & \lambda_0^{n-2} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

le somme dei prodotti i ad i delle λ; quindi, indicando con L_i ($i=1, 2, \dots,$
queste somme e convenendo che sia $L_0 = 1$ e $L_i = 0$ per $i >$
$i < n$, concluderemo: l'essere

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} L_0 & -L_1 & L_2 & \dots & (-1)^n L_n \\ a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

è condizione necessaria e sufficiente affinchè gli n punti $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda$

della data curva appartengano a uno stesso spazio di $n-2$ dimensioni.

Indicando per brevità con D_i il determinante che si ottiene sopprimendo l'i^{ma} colonna della matrice

$$\left\|\begin{matrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{matrix}\right\|,$$

la (2) potrà scriversi più concisamente così

$$(2') \qquad \sum_{i=0}^{i=n} D_i L_i = 0.$$

2. Facciamo nelle (2), (2') $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda$ ed otterremo

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & -n\lambda & \binom{n}{2}\lambda^2 & \dots & (-1)^n\lambda^n \\ a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0, \quad (3') \sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i} D_i \lambda^i = 0.$$

Dunque: *Vi sono n posti in ciascuno dei quali coincidono n punti della curva appartenenti a un medesimo spazio a $n-2$ dimensioni; i valori corrispondenti del parametro λ sono le radici dell'equazione (3) o (3').* Chiameremo *stazionarii* tanto questi n punti notevoli della curva quanto i corrispondenti S_{n-2} osculatori.

Siano $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ le radici della (3') e O_i la somma dei loro prodotti i ad i; sarà

$$O_i = (-1)^i \binom{n}{i} \frac{D_{n-i}}{D_n} \text{ per } i = 1, 2, \dots, n \text{ e } O_0 = 1,$$

epperò

$$\sum_{i=0}^{i=n} D_i O_i = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i D_i \binom{n}{i} \frac{D_{n-i}}{D_n} = \frac{1}{2D_n} \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i [1+(-1)^n] D_i D_{n-i}.$$

Ne segue che quando n è dispari è identicamente

$$\sum_{i=0}^{i=n} D_i O_i = 0$$

e questa relazione ci dice, avuto riguardo alla (2′), che i punti stazionarii della curva appartengono a uno stesso spazio di $n-2$ dimensioni; dunque:

Quando n è dispari, gli n punti stazionarii di una $C_{1,n,n-1}$ razionale stanno in uno spazio lineare a $n-2$ dimensioni.

Per es. i tre flessi di una cubica piana razionale sono in linea retta.

3. Nella (2′) facciamo invece

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-q-1} = \mu$$

$$\lambda_{n-q} = \lambda_{n-q+1} = \ldots = \lambda_{n-1} = \nu$$

ed otterremo:

$$\sum_{i=0}^{i=n} D_i \sum_{r=0}^{r=i} \binom{n-q}{r-i}\binom{q}{i} \mu^{i-r}\nu^r = 0 \tag{4}$$

equazione di grado $n-q$ in μ, di grado q in ν che conduce al seguente risultato:

La curva $C_{1,n,n-1}$ razionale ammette in ogni suo punto μ, q spazii a $n-2$ dimensioni aventi comuni con essa $n-q$ punti coincidenti in μ e q coincidenti in un altro punto ν; fra μ e ν passa una corrispondenza algebrica $(q, n-q)$, i cui elementi uniti sono i punti stazionarii della curva.

In particolare supponendo $q = 1$ si vede che: *Per ogni punto della curva $C_{1,n,n-1}$ esiste uno spazio a $n-2$ dimensioni che ivi la oscula; per esso passano $n-1$ tali spazii che la osculano altrove.* L'equazione che lega il parametro μ di un punto della curva a quello λ di uno dei punti di osculazione di essa con ispazii a $n-2$ dimensioni passanti per quello, è

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}[D_{n-i-1} + D_{n-i}\mu]\binom{n-1}{i}\lambda^{n-1-i} = 0.$$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ le radici di questa considerata come equazione in λ; il primo membro della (2′), quando L_i sia la somma dei

i a i delle n quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu$, diviene, a meno del di-
$D_{n-1} + D_n \mu$,

$$)^i \binom{n-1}{i} D_i D_{n-i-1} + \mu \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (D_i D_{n-i} + D_{i+1} D_{n-i-1})$$

$$+ \mu^2 \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} D_{i+1} D_{n-i};$$

ıando n è pari, questa espressione è nulla per tutti i valori di μ;
:

*uando n è pari, i punti di contatto della curva $C_{1,n,n-1}$ con i suoi
ı $n - 2$ dimensioni osculatori che passano per un punto arbitrario
, stanno in uno spazio a $n - 2$ dimensioni che contiene questo*

l es.: per un punto di una quartica di 2ª specie passano tre suoi
sculatori, e i punti di contatto determinano un piano su cui sta
ȷuel punto.

, qualunque sia n, si congiungono con un S_{n-2} i punti di con-
$C_{1,n,n-1}$ con gli S_{n-2} osculatori che contengono un punto di
otterrà, al variare di questo punto, una serie semplicemente in-
i S_{n-2}; *per ogni punto del dato spazio S passano due di questi
ı $n - 2$ dimensioni.*

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ i parametri di $n - 1$ punti arbitrarii della
essi determinano un S_{n-2} avente per equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-1} \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_1^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_1^r & \ldots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_1^r \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_2^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_2^r & \ldots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_2^r \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_{n-1}^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_{n-1}^r & \ldots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_{n-1}^r \end{vmatrix} = 0,$$

ossia anche, sviluppando il primo membro secondo gli elementi della prima verticale,

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} x_i \begin{Vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,0} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,0} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_i^n & \lambda_i^{n-1} & \dots & 1 \\ \lambda_{i+1}^n & \lambda_{i+1}^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{n-1}^n & \lambda_{n-1}^{n-1} & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

ovvero, chiamando L_i la somma dei prodotti i ad i delle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ e applicando un risultato da noi dimostrato altrove (*),

$$(5)\sum_i x_i \sum_{k,l} \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & \dots & a_{0,l-1} & a_{0,l+1} & \dots & a_{0,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,0} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,0} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,l+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

In particolare, l'equazione dello spazio a $n-2$ dimensioni che oscula in λ la curva sarà:

$$(6)\sum_i x_i \sum_{k,l} \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & \dots & a_{0,l-1} & a_{0,l+1} & \dots & a_{0,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,0} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,0} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,l+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$\times\, n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{l}\right)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}\lambda^{k+l-1} = 0.$$

Se in questa equazione si ritengono dati $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, ess servirà a determinare i punti dalla curva i cui spazii a $n-2$ dimensio

(*) Vedi la *Nota su una classe di determinanti* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVI).

osculatori passano pel punto di coordinate x_i; e siccome essa è di grado $2(n-1)$ in λ, così:

Le curve $C_{1,n,n-1}$ razionali sono di classe $2(n-1)$.

5. L'equazione

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_{i,r}\lambda^r = 0$$

(ove i è uno qualunque dei numeri $0, 1, \ldots, n-1$) determina i punti comuni alla data curva e allo spazio a $n-2$ dimensioni $x_i = 0$; ne viene che se questo è uno degli spazii stazionarii, quell'equazione dovrà assumere la forma $\alpha_i(\lambda - \omega_i)^n$. Presi dunque come spazii fondamentali del nostro sistema di coordinate gli spazii stazionarii della data curva, questa sarà rappresentata dalle seguenti equazioni

$$\rho x_i = \alpha_i(\lambda - \omega_i)^n \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{7}$$

ove le α_i si potrebbero anche supporre tutte eguali a 1. *E questa rappresentazione parametrica canonica è legittima ogniqualvolta i punti stazionarii della curva sono distinti.*

Le coordinate di un punto qualunque della tangente nel punto λ alla curva $C_{1,n,n-1}$ (7) possono rappresentarsi così

$$\rho x_i = \alpha_i(\lambda - \omega_i)^n + kn\alpha_i(\lambda - \omega_i)^{n-1} \quad (i=0, 1, \ldots, n-1),$$

ove k è il parametro individuante i varii punti della tangente stessa. Se k_i è il valore del parametro che spetta all'intersezione di questa tangente collo spazio $x_i = 0$, sarà evidentemente

$$k_i = -\frac{\lambda - \omega_i}{n}.$$

Ne viene che il gruppo di numeri $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ è projettivo al gruppo $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$; ma quest'ultimo è indipendente dal punto λ, dunque:

Se i piani stazionarii di una $C_{1,n,n-1}$ razionale sono tutti distinti, il gruppo degli n punti in cui essi sono intersecati da una tangente alla

curva, si conserva projettivo a sè stesso al variare di questa tangente.

Per es.: una tangente a una quartica gobba di 2ª specie seca i piani stazionarii della curva in quattro punti il cui rapporto anarmonico è costante; in altre parole la curva appartiene a un complesso tetraedrale la cui superficie singolare è formata dai piani stazionarii della curva.

ALCUNE PARTICOLARI $C_{1,n,n-1}$ RAZIONALI.

6. Fra le curve razionali d'ordine n dello spazio a $n-1$ dimensioni, meritano un posto speciale quelle suscettibili della seguente rappresentazione parametrica:

$$(8)\quad \rho x_0=\lambda^n,\ \rho x_1=\lambda^{n-1},\dots,\rho x_{r-1}=\lambda^{n-r+1},\rho x_r=\lambda^{n-r-1},\dots,\rho x_{n-2}=\lambda,\rho x_{n-1}=1$$

ove r è uno qualunque dei numeri $1, 2, \dots, n-1$.

La condizione affinchè gli n punti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ di tale curva appartengano a uno stesso spazio a $n-2$ dimensioni è

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_1^{n-r+1} & \lambda_1^{n-r-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_2^{n-r+1} & \lambda_2^{n-r-1} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \lambda_n^n & \lambda_n^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-r+1} & \lambda_n^{n-r-1} & \dots & \lambda_n & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ossia } (9)\ L_r = 0$$

L'equazione che dà i punti stazionii ha r radici nulle e $n-r$ radici infinite, dunque *dei punti stazionarii della curva r coincidono nel primo e $n-r$ nell'ultimo punto fondamentale del nostro sistema di riferimento* (*). L'equazione che lega il parametro λ del punto in cui uno spazio a $n-2$ dimensioni oscula la curva al parametro μ del punto in cui l'incontra è

$$\frac{\lambda}{r} + \frac{\mu}{n-r} = 0,$$

e ci prova che *fra quei due punti esiste una corrispondenza projettiva avente per elementi uniti i punti stazionarii della curva.*

(*) Questa è la condizione geometrica affinchè le equazioni (1) si possano ridurre alla forma (8). La condizione algebrica per ciò è quindi che la (2) abbia una radice r-pla e una $(n-r)$-pla.

7. L'equazione dello spazio a $n-2$ dimensioni determinato dai punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ della curva, ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{r-1} & x_r & \ldots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_1^{n-r+1} & \lambda_1^{n-r-1} & \ldots & \lambda_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n-1}^n & \lambda_{n-1}^{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1}^{n-r+1} & \lambda_{n-1}^{n-r-1} & \ldots & \lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(10) \qquad L_{r-1} x_0 + \sum_{i=1}^{i=r-1} (-1)^i (L_i L_{r-1} - L_{i-1} L_r) x_i +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{i=n-1} (-1)^i (L_i L_{r-1} - L_{i-1} L_r) x_{i-1} + (-1)^{n+1} S_{n-1} L_r x_{n-1} = 0.$$

Ne segue che l' equazione dello spazio a $n-2$ dimensioni che oscula in λ la curva in esame è:

$$(11) \qquad \sum_{i=0}^{i=r-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] \lambda^i x_i +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{i=n} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] \lambda^i x_{i-1} = 0 \; (*).$$

Se in questa relazione supponiamo fissati i valori di $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, essa si muterà in un'equazione di grado n in λ che servirà a determinare i parametri dei punti della curva i cui S_{n-2} osculatori passano per il punto di coordinate x_i; quindi :

La curva è della classe n.

8. Chiamiamo k una costante arbitraria e poniamo nella (11)

$$\lambda = \frac{k}{\mu};$$

essa diverrà

(*) Rammentiamo che per definizione $\binom{n-1}{i}$ vale 1 se $i=0$ od $n-1$, vale invece 0 se $i > n-1$ o $i < 0$.

$$\sum_{i=0}^{i=r-1}(-1)^i\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\mu^{n-i}x_i+$$

$$+\sum_{i=r+1}^{i=n}(-1)^i\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\mu^{n-i}x_i=0$$

e servirà a determinare i punti $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ che corrispondono ai punti ... di osculazione considerati in fine del n.° prec. nella involuzione binaria ... $\lambda\mu = k$. Se chiamiamo M_i la somma dei prodotti i ad i delle μ avremo ... le relazioni

$$M_i=\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\frac{x_i}{x_0} \qquad (i=1, 2, \dots, r-1)$$

$$M_r=0$$

$$M_i=\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\frac{x_{i-1}}{x_0} \qquad (i=r+1, r+2, \dots, n);$$

la seconda delle quali manifesta che *i suddetti punti $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ appartengono a uno spazio a $n-2$ dimensioni*. Cerchiamone l'equazione.

Se L_i è la somma dei prodotti i a i delle $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ le equazioni precedenti si possono scrivere così

$$L_i+\mu_n L_{i-1}=\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\frac{x_i}{x_0} \qquad (i=1, 2, \dots, r-1)$$

$$L_r+\mu_n L_{r-1}=0$$

$$L_i+\mu_n L_{i-1}=\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\frac{x_{i-1}}{x_0} \qquad (i=r+1, r, \dots n)$$

ossia eliminando μ_n

$$L_i-\frac{L_{r-1}}{L_r}L_{i-1}=\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\frac{x_i}{x_0} \qquad (i=1, 2, \dots, r-1)$$

$$L_i-\frac{L_{r-1}}{L_r}L_{i-1}=\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i\frac{x_{i-1}}{x_0} \qquad (i=r+1, r+2, \dots$$

E queste eguaglianze, quando si tenga presente la (10), ci conducono subito a concludere che l'equazione cercata di quello spazio a $n-2$ dimensioni è

$$(12) \qquad \sum_{i=0}^{i=r-1}(-1)^i\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i x_i X_i +$$

$$+\sum_{i=r+1}^{i=n}(-1)^i\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i X_{i-1} x_{i-1}=0,$$

essendo X_i coordinate correnti. Ne tragghiamo la conclusione che *lo spazio suddetto è il polare del punto considerato* $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ *rispetto alla quadrica di equazione*

$$(13) \qquad \sum_{i=0}^{i=r-1}(-1)^i\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i X_i^2 +$$

$$+\sum_{i=r+1}^{i=n}(-1)^i\left[\binom{n-1}{i}-\frac{n-r}{r}\binom{n-1}{i-1}\right]k^i X_{i-1}^2=0.$$

Al variare di k si ottiene così una serie semplicemente infinita (di indice n) di quadriche rispetto a ciascuna delle quali i punti fondamentali del nostro sistema di riferimento formano un n-gono autoconjugato. Osserviamo finalmente che il confronto delle equazioni (11) e (12) mostra che gli spazii a $n-2$ dimensioni polari del punto $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ rispetto alle quadriche di questa serie osculano una $C_{1,n,n-1}$ razionale le cui coordinate

$$1^a,\ 2^a,\ \ldots,\ r^{ma},\ (r+1)^{ma},\ \ldots,\ (n-1)^{ma},\ n^{ma}$$

sono espresse nel seguente modo in funzione di un parametro k:

$$\frac{k^n}{x_0},\ \frac{k^{n-1}}{x_1},\ \ldots,\ \frac{k^{n-r+1}}{x_{r-1}},\ \frac{k^{n-r-1}}{x_r},\ \ldots,\ \frac{k}{x_{n-2}},\ \frac{1}{x_{n-1}};$$

questa curva è della stessa specie della data ed è disposta come questa rispetto al sistema di riferimento.

9. Oltre alle ipotesi dei n.i 6-8, facciamo quella che si abbia $n = 2r$. Otterremo una curva $C_{1, 2r, 2r-1}$ razionale avente due punti singolari risultanti ciascuno dalla coincidenza di r punti stazionarii; lo spazio a $2(r-1)$ dimensioni che oscula la curva nel punto λ l' incontra nel punto μ determinato dalla relazione (cfr. n.° 6)

$$\lambda + \mu = 0. \tag{14}$$

Poniamo per brevità

$$A_i = \binom{2r-1}{i} - \binom{2r-1}{i-1};$$

sarà

$$A_i + A_{2r-i} = 0 \tag{15}$$

e l'equazione dello spazio a $2(r-1)$ dimensioni che oscula in λ la data curva $C_{1, 2r, 2r-1}$ si potrà scrivere così:

$$x_{2r-1}\lambda^{2r} - \sum_{i=1}^{i=r-1}(-1)^i A_{2r-1}\, x_{2r-i-1}\lambda^{2r-i} - \sum_{i=r+1}^{i=2r}(-1)^i A_{2r-i}\, x_{2r-i}\lambda^{2r-i} = 0.$$

Quando si fissino i valori delle x quest'equazione servirà a determinare i punti della curva i cui spazii osculatori passano pel punto $(x_0, x_1, \ldots, x_{2r-1})$; siccome la somma dei prodotti r ad r dei parametri di questi punti è nulla, così i punti stessi appartengono a uno spazio a $2(r-1)$ dimensioni. L' equazione di questo è (se X_i sono le coordinate correnti):

$$\sum_{i=0}^{i=r-1}(-1)^i A_{2r-i}\, x_{2r-i-1} X_i + \sum_{i=r+1}^{i=2r}(-1)^i A_{2r-i}\, x_{2r-i-1} X_{i-1} = 0,$$

ossia, per la (15),

$$\sum_{i=0}^{i=r-1}(-1)^i A_i [x_i X_{2r-i-1} - x_{2r-i-1} X_i] = 0;$$

ne viene che quello spazio a $2(r-1)$ dimensioni passa pel punto

$(x_0, x_1, \ldots, x_{2r-1})$. Si ha pertanto il seguente teorema:

Se in uno spazio a $2r - 1$ dimensioni si ha una curva d'ordine $2r$ razionale con due punti singolari ognuno dei quali nasce dalla coincidenza di r punti stazionarii, da ogni punto dello spazio escono $2r$ spazii a $2(r-1)$ dimensioni osculatori i cui punti di contatto stanno con quello in uno stesso spazio a $2(r-1)$ dimensioni.

Ogni curva di questa specie determina quindi un sistema nullo. È facile vedere che essa ne determina anche un altro. Infatti dal punto $(x_0, x_1, \ldots, x_{2r-1})$ si spiccano $2r$ spazii a $2(r-1)$ dimensioni osculatori alla curva, ognuno dei quali incontra nuovamente la curva in un punto; grazie alla (14) i parametri degli n punti di segamento sono determinati dall'equazione che deriva dalla (16) mutando il segno di λ; ne viene che questi punti stanno nello spazio a $2(r-1)$ dimensioni di equazione

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} A_i[x_i X_{2r-i-1} - x_{2r-i-1} X_i] = 0,$$

spazio che contiene il punto $(x_0, x_1, \ldots, x_{2r-1})$. Pertanto:

I punti nei quali gli spazii a $2(r-1)$ dimensioni osculatori alla curva predetta uscenti da un punto arbitrario dello spazio, secano la curva, appartengono a uno spazio a $2(r-1)$ dimensioni contenente anche quel punto.

Supponendo $r = 2$ si ritrovano delle proprietà notissime delle quartiche gobbe aventi due tangenti stazionarie. (*)

Collineazioni che mutano in sè stessa una curva $C_{1,n,n-1}$ razionale.

10. Sia $C_{1,n,n}$ una curva razionale normale dello spazio a n dimensioni S_n. Projettiamola da un punto qualunque O su uno spazio a $n-1$ dimensioni S_{n-1}; otterremo una curva $C_{1,n,n-1}$ razionale che presenterà delle specialità quando il centro di projezione si sceglie in posizioni particolari e soltanto allora. Se fra i punti di $C_{1,n,n}$ esiste una cor-

---

(*) Cremona, *Rend. del R. Istituto Lombardo*, 1868; Appell, *Comptes Rendus*, 1876.

rispondenza univoca, lo stesso accadrà pei punti di $C_{1,n,n-1}$; ma, mentre la corrispondenza su $C_{1,n,n}$ genera sempre una corrispondenza collineare nello spazio S_n (*), altrettanto non fa la corrispondenza su $C_{1,n,n-1}$ perchè alle n intersezioni di questa curva con uno spazio a $n-2$ dimensioni non corrispondono in generale altrettanti punti della curva stessa soddisfacenti alla medesima condizione. Si può però domandare se sia possibile di scegliere il centro di projezione in modo che projettando su un S_{n-1} un'omografia esistente su una $C_{1,n,n}$ nasca in S_{n-1} una collineazione: e siccome tale corrispondenza, se esiste, muta in sè stessa la curva $C_{1,n,n-1}$, così cominciamo dal vedere se possa esistere una trasformazione collineare dello spazio in cui $C_{1,n,n-1}$ funzioni da curva unita.

Osserviamo perciò che *una collineazione la quale trasforma in sè stessa la $C_{1,n,n-1}$ muta in sè stesso il gruppo degli n punti stazionarii (distinti o non) della curva.* Viceversa: *ogni trasformazione omografica fra i punti di $C_{1,n,n-1}$ che trasformi in sè stesso il gruppo de' punti stazionarii, determinerà in S_{n-1} una collineazione atta a mutare in sè stessa quella curva.* Essa infatti sarà projezione di una corrispondenza univoca fra i punti della curva $C_{1,n,n}$ (di cui $C_{1,n,n-1}$ è projezione), la quale determinerà nello spazio S_n che contiene $C_{1,n,n}$ una collineazione in cui gli n spazii osculatori di $C_{1,n,n}$ uscenti dal centro O di projezione si corrisponderanno fra loro (**); O è pertanto un punto unito di questa collineazione. Agli S_{n-1} di S_n uscenti da O corrisponderanno in conseguenza degli spazii della stessa specie pure passanti per O; a un gruppo di n punti di $C_{1,n,n}$ posti con O in un S_{n-1} corrisponde quindi un gruppo avente la stessa proprietà; epperò a n punti di $C_{1,n,n-1}$ posti in un S_{n-2} di S_{n-1} corrisponderanno n punti analoghi; e ciò basta per mostrare la verità dell'asserzione precedente.

Ciò prova che per ottenere delle curve $C_{1,n,n-1}$ razionali con trasformazioni collineari in sè stesse, basta projettare una $C_{1,n,n}$ da

---

(*) Vedi il n° 16 della mia Nota *Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVI).

(**) Le tracce di questi spazii a $n-1$ dimensioni sullo spazio in cui sta $C_{1,n}$, sono gli spazii stazionarii di questa curva.

punto O su una S_{n-1} in modo che il gruppo dei punti stazionarii della curva ammetta delle trasformazioni lineari in sè stesso. (*)

11. Affinchè tali trasformazioni siano in numero infinito è necessario che questo gruppo consti di due elementi, nell'un dei quali si riuniscano r, nell'altro $n - r$ punti stazionarii. Ciò conduce al teorema:

Dato un $(n + 1)$-edro di osculazione (**) di una curva razionale normale dello spazio a n dimensioni e un'omografia fra i punti della curva avente per elementi doppii i punti d'appoggio della corda corrispondente; projettando la curva e l'omografia da uno dei vertici di quel poliedro non posto sulla curva, si ottiene una curva razionale con un' omografia a cui corrisponde una collineazione capace di mutare la curva in sè stessa. Se, tenendo fisso l'$(n + 1)$-edro si muta l'omografia sulla curva, si otterranno ∞^1 collineazioni atte a trasformare in sè stessa la curva projezione.

Se il centro di projezione è l'r^{mo} vertice del poliedro, la curva projezione si può rappresentare colle equazioni (cfr. n.^{i} 6-9):

$$\rho x_0=\lambda^n,\ \rho x_1=\lambda^{n-1}, \ldots, \rho x_{r-1}=\lambda^{n-r+1},\ \rho x_r=\lambda^{n-r-1}, \ldots, \rho x_{n-2}=\lambda,\ \rho x_{n-1}=1$$

e le omografie che la trasformano in sè stessa si ottengono tutte facendo variare k nelle equazioni

$$\rho x_0 = k^n y_0,\ \rho x_1 = k^{n-1} y_1, \ldots, \rho x_{r-1} = k^{n-r+1} y_{r-1},\ \rho x_r = k^{n-r-1} y_r, \ldots,$$
$$\rho x_{n-2} = k y_{n-2},\ \rho x_{n-1} = y_{n-1}.$$

12. Affinchè il gruppo dei punti stazionarii della $C_{1,n,n-1}$ razionale ammetta un numero finito di trasformazioni projettive in sè stesso, esso deve rappresentare una forma binaria che ammetta lo stesso numero di trasformazioni lineari in sè stessa. Ora le forme binarie che godono la proprietà di essere mutate in sè stesse quando le variabili vengano

---

(*) I risultati contenuti in questo n^o. sono noti da tempo al mio carissimo amico prof. C. Segre, come io venni a sapere dopo aver compiuto il presente studio.

(**) Per questa denominazione si vegga il n.^{o} 4 del mio citato lavoro *Sulle curve razionali normali.*

trasformate linearmente sono (*), oltre alle cubiche e alle biquadratiche, una forma di 6° ordine, che si dice *tetraedrica*, riducibile alla forma $x_1 x_2(x_1^4 - x_2^4)$; una di 8° ordine, che si dice *ottaedrica*, riducibile alla forma $x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8$; una di 12° ordine, che si dice *icosaedrica*, riducibile alla forma $x_1 x_2(x_1^{10} + 11 x_1^5 x_2^5 - x_2^{10})$; inoltre le forme che corrispondono al gruppo ciclico e al gruppo diedrico di trasformazioni lineari; e finalmente i covarianti delle forme testè enumerate. A ognuna di queste forme corrisponde una $C_{1,n,n-1}$ con un numero finito di trasformazioni collineari in sè stessa. Ci occuperemo ora di determinare in ogni caso queste trasformazioni limitandoci però alle curve che sembrano più interessanti; supporremo sempre tutti distinti i punti stazionarii, cosicchè ci sarà lecito supporre la curva data mediante la sua rappresentazione parametrica canonica (n.° 5).

13. $n = 3$. *Cubica piana razionale.*—Sia la curva rappresentata dalle equazioni

$$\rho x_i = (\lambda - \omega_i)^3 \qquad (i = 0, 1, 2);$$

il gruppo 0, 1, 2 di punti singolari è mutato in sè stesso da due projettività cicliche di 3° ordine e da tre involuzioni aventi ciascuna per elemento doppio uno dei punti stazionarii e per elementi corrispondenti gli altri due; si hanno in corrispondenza cinque collineazioni che trasformano la curva in sè stessa, due sono projettività cicliche di 3° ordine, mentre le altre sono omologie armoniche.

14. $n = 4$. *Quartica gobba di 1ª specie generale* (**).—Il gruppo 0, 1, 2, 3 di punti stazionarii della curva è mutato in sè stesso in generale soltanto dalle tre involuzioni

$$(0, 1)(2, 3), \qquad (0, 2)(3, 1), \qquad (0, 3)(1, 2);$$

(*) Klein: *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (*Math. Annalen*, t. IX, p. 182); *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von 5ten Grade.* (Leipzig 1884).

(**) Cfr. Brambilla, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, serie II, t. X.

quindi la curva stessa non ammette in generale che tre involuzioni assiali atte a mutarla in sè stessa; le loro equazioni sono

$$\rho x_p = y_q \qquad \rho x_q = y_p \qquad \rho x_{p'} = y_{q'} \qquad \rho x_{q'} = y_{p'}$$

ove $(p, q)(p', q')$ è una delle distribuzioni in due coppie dei numeri 0, 1, 2, 3.

Quartica gobba armonica o equianarmonica.—Altre trasformazioni della curva in sè stessa si ottengono se il gruppo dei punti stazionarii è armonico (*) o equianarmonico.

Se è armonico e sono conjugati 0, 1 e 2, 3 il gruppo è trasformato in sè stesso dall' involuzione avente per punti doppii 0, 1 e da quella avente per punti doppii 2, 3; quindi la curva è mutata in sè stessa dalle due collineazioni

$$\rho x_0 = y_0 \qquad \rho x_1 = y_1 \qquad \rho x_2 = y_3 \qquad \rho x_3 = y_2$$

$$\rho x_0 = y_1 \qquad \rho x_1 = y_0 \qquad \rho x_2 = y_2 \qquad \rho x_3 = y_3$$

che entrambe sono omologie armoniche.

Se è equianarmonico e precisamente se il gruppo 0, 1, 2, 3 è projettivo al gruppo 2, 0, 1, 3, la curva sarà trasformata in sè stessa anche dalla collineazione

$$\rho x_0 = y_1 \qquad \rho x_1 = y_2 \qquad \rho x_2 = y_0 \qquad \rho x_3 = y_3 ,$$

la quale ha una retta di punti uniti $x_0 = x_1 = x_2$ e due punti uniti isolati $(1, \varepsilon, \varepsilon^2, 0)$ e $(1, \varepsilon^2, \varepsilon, 0)$ ove ε è una radice terza imaginaria dell'unità. (**)

Aggiungiamo l'osservazione che la quartica con due tangenti stazionarie (***) e quella con cuspide ammettono, in virtù del n.° 11 infinite trasformazioni collineari in sè stesse.

(*) È noto che in questo caso la curva ha un punto doppio.

(**) Questa collineazione rientra nella specie che indicammo con [(11) 11] nel nostro studio *Sulle corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazii* (*Giornale di Matematiche*, t. XXII)

(***) Si vegga a questo proposito una memoria del sig. Del Re pubblicata nel t. XXII degli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*.

15. $n = 6$. *Curva tetraedrica.*—Se il gruppo di punti stazionarii di una $C_{3,6,5}$ rappresenta il covariante sestico di una forma biquadratica, i punti stessi si distribuiranno in tre coppie ognuna delle quali comprende i punti doppi dell' involuzione quadratica determinata dalle altre due. La forma ammette, oltre alla trasformazione identica, 11 trasformazioni lineari in sè stessa. Tre sono le involuzioni la cui esistenza serve a caratterizzare il gruppo, ognuna di esse dà luogo a una trasformazione involutoria dello spazio avente come uniti tutti i punti di uno spazio a tre e quelli di uno spazio a una dimensione; p. es. l'involuzione binaria di cui p e q sono gli elementi doppii, $p'q'$ e $p''q''$ sono due coppie di elementi conjugati, conduce a una collineazione avente per elementi uniti tutti i punti per cui è

$$x_{p'} - x_{q'} = 0 \qquad x_{p''} - x_{q''} = 0$$

e tutti quelli per cui è

$$x_p = 0 \qquad x_q = 0 \qquad x_{p'} + x_{q'} = 0 \qquad x_{p''} + x_{q''} = 0\,,$$

ove $p\,q\,p'\,q'\,p''\,q''$ è una permutazione di 0 1 2 3 4 5. Le altre otto trasformazioni lineari della forma non sono involutorie e dànno luogo ad altrettante collineazioni dello spazio. Le equazioni di queste sono

$$\rho\, x_i = y_{n_i}$$

ove gli indici $n_0\, n_1\, n_2\, n_3\, n_4\, n_5$ devono prendere successivamente i seguenti gruppi di valori:

3	2	4	5	1	0
5	4	1	0	2	3
2	3	5	4	1	0
5	4	0	1	3	2
4	5	1	0	3	2
3	2	5	4	0	1
2	3	4	5	0	1
4	5	0	1	2	3.

Una qualunque delle permutazioni di questa tabella si può decom-

porre in due circolari fatte ciascuna su tre elementi; se la permutazione $n_0 n_1 \ldots n_5$ si decompone nelle due permutazioni circolari $(p\,q\,r)$ $(p'\,q'\,r')$, la corrispondente collineazione ha per punti uniti tutti quelli che appartengono alle rette

$$x_p = \varepsilon x_q = \varepsilon^2 x_r \qquad \varepsilon x_{p'} = \varepsilon x_{q'} = \varepsilon^2 x_{r'}$$

ove ε è una radice terza dell'unità. Si presentano così 12 rette notevoli per la curva che trattiamo.

16. $n = 8$. *Curva ottaedrica.*—Quando gli 8 punti stazionari di una $C_{1,8,7}$ razionale formano un gruppo ottaedrico, vi sono 24 trasformazioni lineari del gruppo in sè stesso. Una di queste è l' identità. Nove sono involutorie e sono determinate da ciò che in virtù di esse il gruppo 0, 1, ... , 7 di punti stazionarii subisce una delle seguenti permutazioni:

3	2	1	0	7	6	5	4
1	0	3	2	5	4	7	6
5	7	4	6	2	0	3	1
2	3	0	1	6	7	4	5
6	4	7	5	1	3	0	2
4	7	6	5	0	3	2	1
6	5	4	7	2	1	0	3
7	6	4	5	2	3	1	0
6	7	5	4	3	2	0	1;

se $p\,q$, $p'\,q'$, $p''\,q''$, $p'''\,q'''$ sono le quattro coppie di punti corrispondenti in una delle involuzioni predette, si avrà una collineazione involutoria dello spazio che muta in sè stessa la data curva e ha per ispazii uniti quelli a tre dimensioni aventi per equazioni

$$x_p + \varepsilon x_q = 0\,, \quad x_{p'} + \varepsilon x_{q'} = 0\,, \quad x_{p''} + \varepsilon x_{q''} = 0\,, \quad x_{p'''} + \varepsilon x_{q'''} = 0\,,$$

ove $\varepsilon = \pm 1$. Le 14 trasformazioni lineari non involutorie del gruppo dei punti stazionarii della curva in sè stesso si dividono in due classi. Quelle della prima sono in numero di otto e hanno ciascuna per punti

doppii due dei punti stazionarii, esse corrispondono alle seguenti permutazioni di 0, 1, ..., 7:

0*	3	1	2	7	4	6*	5
0*	2	3	1	5	7	6*	4
2	1*	3	0	5	6	4	7*
3	1*	0	2	6	4	5	7*
3	0	2*	1	4*	7	5	6
1	3	2*	0	4*	6	7	5
1	2	0	3*	6	5*	4	7
2	0	1	3*	7	5*	4	6

(ove segnammo con un asterisco gli elementi doppii): Queste permutazioni si dividono in 5 coppie costituite ciascuna di due a cui corrispondono omografie cogli stessi elementi doppii; le due permutazioni di una coppia, decomposte in permutazioni circolari, si possono rappresentare così

$$(a)(b)(p'q'r')(p''q''r'')$$

$$(a)(b)(p'r'q')(p''r''q'')$$

e dànno luogo a due trasformazioni dello spazio che mutano in sè stessa la $C_{1,8,7}$ e hanno entrambe come punti uniti quelli dello spazio a tre dimensioni

$$x_{p'} = x_{q'} = x_{r'} \qquad x_{p''} = x_{q''} = x_{r''} ;$$

inoltre la prima ha per retta unita quella avente per equazioni

$$x_a = 0 \qquad x_b = 0 \qquad \varepsilon^2 x_{p'} = \varepsilon x_{q'} = x_{r'} \qquad \varepsilon^2 x_{p''} = \varepsilon x_{q''} = x_{r''}$$

mentre la seconda ha per retta unita la

$$x_a = 0 \qquad x_b = 0 \qquad \varepsilon^2 x_{p'} = \varepsilon x_{r'} = x_{q'} \qquad \varepsilon^2 x_{p''} = \varepsilon x_{r''} = x_{q''}$$

ove ε è una radice cubica imaginaria dell'unità. Le altre 6 trasformazioni lineari non involutorie del gruppo corrispondono alle seguenti permutazioni di 0, 1, ..., 7:

7	5	6	4	0	2	1	3
4	6	5	7	3	1	2	0
7	4	5	6	3	0	1	2
5	6	7	4	1	2	3	0
4	5	7	6	1	0	2	3
5	4	6	7	0	1	3	2;

ognuna è decomponibile in due permutazioni circolari fatte ciascuna su quattro elementi, quindi può rappresentarsi così

$$(p\,q\,r\,s)(p'\,q'\,r'\,s')\,;$$

in corrispondenza si ha una collineazione dello spazio che muta in sè stessa la curva $C_{1,8,7}$ e ha per punti uniti tutti quelli che appartengono alle quattro rette

$$x_p = \varepsilon x_s = \varepsilon^2 x_r = \varepsilon^3 x_q \qquad x_{p'} = \varepsilon x_{s'} = \varepsilon^2 x_{r'} = \varepsilon^3 x_{q'}\,,$$

ove ε è una radice quarta dell'unità.

17. $n = 12$. *Curva icosaedrica.*—Se i punti stazionarii della curva $C_{1,12,11}$ formano un gruppo icosaedrico, esisteranno 60 trasformazioni lineari del gruppo in sè stesso. Una è l'identità. Quindici sono involutorie e corrispondono alle seguenti permutazioni del gruppo 0, 1, ..., 11

1	0	7	11	10	9	8	2	6	5	4	3
1	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
1	0	10	9	8	7	11	5	4	3	2	6
1	0	9	8	7	11	10	4	3	2	6	5
1	0	8	7	11	10	9	3	2	6	5	4
2	7	0	6	9	10	3	1	11	4	5	8
6	11	5	8	9	2	0	10	3	4	7	1
5	10	7	8	6	0	4	2	3	11	1	9
4	9	7	5	0	3	11	2	10	1	8	6
3	8	4	0	2	10	11	9	1	7	5	6
7	2	1	8	5	4	11	0	3	10	9	6
11	6	7	4	3	10	1	2	9	8	5	0
10	5	3	2	9	1	11	8	7	4	0	6
9	4	6	8	1	10	2	11	3	0	5	7
8	3	7	1	9	6	5	2	0	4	11	10;

se in una di queste involuzioni si corrispondono le seguenti coppie indici

$$(pp')(qq')(rr')(ss')(tt')(uu')$$

si avrà in conseguenza una collineazione involutoria dello spazio av come spazii di punti uniti i due a cinque dimensioni rappresentati d equazioni

$$x_p+\varepsilon x_{p'}=0,\ x_q+\varepsilon x_{q'}=0,\ x_r+\varepsilon x_{r'}=0,\ x_s+\varepsilon x_{s'}=0,\ x_t+\varepsilon x_{t'}=0,\ x_u+\varepsilon x_{u'}$$

ove $\varepsilon=\pm 1$. Le 44 trasformazioni non involutorie del gruppo punti stazionari si dividono in due classi. Alla prima classe appar gono 24 omografie binarie aventi ciascuna per elementi doppi punti stazionarii; esse sono determinate dalle seguenti permutazioni numeri 0, 1, ... , 11:

0*	1*	3	4	5	6	2	8	9	10	11
0*	1*	6	2	3	4	5	11	7	8	9
0*	1*	4	5	6	2	3	9	10	11	7
0*	1*	5	6	2	3	4	10	11	7	8
3	8	2*	10	11	4	0	7*	5	6	9
6	11	2*	0	5	8	9	7*	1	10	3
9	4	2*	6	8	1	10	7*	11	3	0
10	5	2*	9	1	11	3	7*	4	0	6
4	9	0	3*	11	7	5	1	8*	6	2
2	7	10	3*	0	6	9	5	8*	1	11
10	5	11	3*	2	9	1	6	8*	7	4
11	6	4	3*	10	1	7	9	8*	5	0
3	8	10	11	4*	0	2	5	6	9*	1
5	10	6	0	4*	7	8	11	1	9*	2
11	6	1	7	4*	3	10	0	2	9*	8
7	2	8	5	4*	11	1	3	10	9*	6
4	9	3	11	7	5*	0	8	6	2	10*
6	11	9	2	0	5*	8	4	7	1	10*
8	3	1	9	6	5*	7	0	4	11	10*
7	2	11	1	8	5*	4	6	0	3	10*
5	10	0	4	7	8	6*	1	9	2	3
2	7	9	10	3	0	6*	4	5	8	1
8	3	5	7	1	9	6*	10	2	0	4
9	4	8	1	10	2	6*	3	0	5	7

(ove l'asterisco caratterizza un elemento doppio). Queste permutazioni si distribuiscono in sei sottoclassi composte ciascuna di 4 permutazioni alle quali corrispondono omografie binarie aventi i medesimi elementi uniti; decomposte in permutazioni circolari, le 4 permutazioni di una sottoclasse possono rappresentarsi così:

$$(a)(b)(p'\,q'\,r'\,s'\,t')(p''\,q''\,r''\,s''\,t'')$$

$$(a)(b)(p'\,t'\,s'\,r'\,q')(p''\,t''\,s''\,r''\,q'')$$

$$(a)(b)(p'\,r'\,t'\,q'\,s')(p''\,r''\,t''\,q''\,s'')$$

$$(a)(b)(p'\,s'\,q'\,t'\,r')(p''\,s''\,q''\,t''\,r'').$$

Le corrispondenti collineazioni dello spazio hanno tutte come spazio unito quello a tre dimensioni rappresentato dalle equazioni

$$x_{p'} = x_{q'} = x_{r'} = x_{s'} = x_{t'} \qquad x_{p''} = x_{q''} = x_{r''} = x_{s''} = x_{t''}$$

ed hanno inoltre come rette unite le quattro rappresentate rispettivamente dai quattro sistemi di equazioni

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{t'} = \varepsilon^2 x_{s'} = \varepsilon x_{r'} = x_{q'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{t''} = \varepsilon^2 x_{s''} = \varepsilon x_{r''} = x_{q''}$$

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{q'} = \varepsilon^2 x_{r'} = \varepsilon x_{s'} = x_{t'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{q''} = \varepsilon^2 x_{r''} = \varepsilon x_{s''} = x_{t''}$$

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{s'} = \varepsilon^2 x_{q'} = \varepsilon x_{t'} = x_{r'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{s''} = \varepsilon^2 x_{q''} = \varepsilon x_{t''} = x_{r''}$$

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{r'} = \varepsilon^2 x_{t'} = \varepsilon x_{q'} = x_{s'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{r''} = \varepsilon^2 x_{t''} = \varepsilon x_{q''} = x_{s''}$$

ove ε è una radice quinta imaginaria dell'unità. — Le trasformazioni binarie non involutorie della seconda classe sono determinate dalle seguenti permutazioni degli indici $0, 1, \ldots, 11$:

5	10	4	7	8	6	0	9	2	3	11	1
6	11	8	9	2	0	5	3	4	7	1	10
4	9	11	7	5	0	3	6	2	10	1	8
5	10	8	6	0	4	7	3	11	1	9	2
3	8	11	4	0	2	10	6	9	1	7	5
4	9	5	0	3	11	7	10	1	8	6	2
3	8	0	2	10	11	4	1	7	5	6	9
2	7	3	0	6	9	10	8	1	11	4	5
10	5	1	11	3	2	9	0	6	8	7	4
7	2	5	4	11	1	8	10	9	6	0	3
9	4	1	10	2	6	8	0	5	7	11	3
7	2	4	11	1	8	5	9	6	0	3	10
9	4	10	2	6	8	1	5	7	11	3	0
11	6	3	10	1	7	4	8	5	0	2	9
8	3	9	6	5	7	1	4	11	10	2	0
11	6	10	1	7	4	3	5	0	2	9	8
8	3	6	5	7	1	9	11	10	2	0	4
10	5	9	1	11	3	2	4	0	6	8	7
6	11	0	5	8	9	2	1	10	3	4	7
2	7	6	9	10	3	0	11	4	5	8	1.

Ognuna delle permutazioni testè scritte si può ottenere con quattro permutazioni circolari eseguite su quattro terne di elementi onde può rappresentarsi così

$$(p\,q\,r)(p'\,q'\,r')(p''\,q''\,r'')(p'''\,q'''\,r''');$$

corrispondentemente si ha nello spazio una collineazione avente come punti uniti tutti quelli dei tre spazii a tre dimensioni rappresentati dalle equazioni

$$x_p = \varepsilon x_q = \varepsilon^2 x_r \quad x_{p'} = \varepsilon x_{q'} = \varepsilon^2 x_{r'} \quad x_{p''} = \varepsilon x_{q''} = \varepsilon^2 x_{r''} \quad x_{p'''} = \varepsilon x_{q'''} = \varepsilon^2 x_{r'''},$$

ove ε è una radice cubica dell' unità.

Mantova, 30 settembre 1888.

GINO LORIA.

UNA TRASFORMAZIONE DI SERIE.

Nota del prof. S. **Pincherle**, a Bologna.

Adunanza del 9 dicembre 1888.

È noto che la trascendente

$$\int_0^1 e^{-x}\, x^{z-1}\, dx, \tag{1}$$

considerata già dal de Gasparis, è stata rappresentata dal Prym con $P(z)$ e sviluppata in serie della forma

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(z+n)n!} + \cdots. \tag{2}$$

A questo sviluppo se ne può sostituire un altro.

Ricordando infatti la formola (Hermite, *Cours lithogr.*, p. 110)

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n dx = \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

e ponendo

$$e^{-x} = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n!}$$

viene, sostituendo nella (1):

$$P(z) = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)}. \tag{3}$$

Non so se la trasformazione della serie (2) nella (3) sia già stata notata. Ad ogni modo, questa trasformazione è un caso particolare della seguente, che non mi sembra priva d'interesse.

Abbiasi la serie

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n} \tag{4}$$

dove le a_n si suppongono tali che la serie

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

converga in un cerchio di raggio maggiore di 2. Si avrà

$$F(z) = \int_0^1 f(x) x^{z-1} dx$$

e quindi

$$F(z) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n x^{z-1} dx.$$

Applicando la formola ricordata ed integrando termine a termine si ottiene così per la $F(z)$ lo sviluppo

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

che si può adoperare con frutto nello studio delle trascendenti analoghe alle funzioni euleriane.

Bologna, novembre 1888.

S. PINCHERLE.

II° ELENCO DI SOCI

[*Vedi* pag. 13-22 del presente volume, parte 1ª].

Avvertenza. — *I signori Soci, residenti e non residenti, sono vivamente pregati di comunicare sollecitamente alla Segreteria del Circolo le eventuali modificazioni od aggiunte da portarsi negli Elenchi già pubblicati.*

RESIDENTI

DATA DELLA NOMINA	
1888, 14 ottobre.	**Bresslau** Ludwig, prof. di Matematica. — *Via Lincoln, 55.*
1888, 14 ottobre.	**Certo** Luigi, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo Umberto I. — *Vicolo Stabile, 11.*
1888, 12 agosto.	**Conigliaro** Salvatore — *Via Giojamia, 33.*
1888, 12 agosto.	**Morisani** Enrico. — *Via Lolli, 128.*
1888, 8 aprile.	**Paternò di Sessa** Emanuele, socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, socio effettivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, corrispondente delle Reali Accademie delle Scienze di Napoli, di Torino, della R. Accademia Gioenia di Catania, della Società Scientifica Argentina; presidente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro del Consiglio superiore di P. I.; rettore della R. Università di Palermo; prof. ord. di Chimica generale nella R. Università ed inc. di Chimica docimastica nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Palermo; consigliere comunale — *Via Università, 15.*
1888, 9 settembre.	**Tomasini** Francesco. — *Via Stabile, 105.*
1888, 8 aprile.	**Tripicliano** Giuseppe, ingegnere — *Via Bara, 60.*

NON RESIDENTI

—

DATA DELLA NOMINA

1888, 12 agosto. **Amaturo** Enrico, dottore in Matematica, ingegnere, assistente alla cattedra di Geometria Descrittiva nella R. Università di Napoli. — *Via S. Giuseppe dei Ruffi, 6 — Napoli.*

1888, 26 agosto. **Basile** Ernesto, architetto, prof. di Architettura nella R. Scuola d'applicazione per gl' Ingegneri in Roma. — *Via Venti Settembre, 98 A — Roma.*

1888, 9 settembre. **Bordiga** Giovanni, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Venezia. — *Venezia.*

1888, 26 agosto. **Fatta** Giuseppe, direttore del Ginnasio e prof. nella R. Scuola Normale Femminile di Petralia Sottana. — *Petralia Sottana (Sicilia).*

1888, 8 luglio. **Gambardella** Filippo, professore di Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno. — *Livorno.*

1888, 9 settembre. **Jadanza** Nicodemo, dottore in Matematica, socio dell' Accademia Pontaniana di Napoli; prof. straord. di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino; prof. straord. di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl' Ingegneri in Torino.— *Piazza B. V. degli Angeli, 2 — Torino.*

1888, 13 maggio. **Le Paige** Constantin, dottore in scienze fisiche e matematiche, segretario generale della Società Reale delle Scienze di Liegi; corrispondente della R. Accademia del Belgio, dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Lisbona; membro straniero della Società Reale delle Scienze di Boemia, dell'Accademia Imperiale Alemanna Leopoldino-Carolina de' Curiosi della Natura; membro onorario della Società Matematica di Amsterdam; membro delle Società Matematiche di Francia e di Boemia; prof. ord. di Analisi e di Geometria superiore nella Università di Liegi.—*Rue des Anges, 21—Liège.*

1888, 13 maggio. **Marcolongo** Roberto, dottore in Matematica, assistente alla cattedra di Meccanica razionale nella R. Università di Roma.— *Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma.*

ɔMINA

ɲno. **Merlani** Adolfo, dottore in Matematica.— *Via Indipendenza, 19 — Bologna.*

;gio. **Mittag-Leffler** Gösta, dottore in Filosofia; membro dell'Accademia Reale delle Scienze di Svezia, della Società Reale delle Scienze di Upsala, della Società Reale delle Scienze di Norvegia, della Società delle Scienze di Finlandia, della Società Matematica di Francia, della Società Astronomica di Lipsia; membro onorario della Società Filosofica di Cambridge; corrispondente della Società Reale delle Scienze di Gottinga e della Società Reale delle Scienze di Liegi; redattore capo degli *Acta Mathematica ;* prof. ord. di Analisi superiore nella Università di Stoccolma. — *Stockholm (Svezia).*

;gio. **Montesano** Domenico, dottore in Matematica, prof. straord. di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Bologna. — *Bologna.*

;gio. **Panizza** Francesco, dottore in Matematica, prof. nel R. Liceo di Alessandria. — *Alessandria.*

bre. **Previtera** Carmelo. — *Linguaglossa (Provincia di Catania).*

;gio. **Reggio** Giuseppe Zaccaria, dottore in Matematica; preside del R. Istituto Tecnico di Treviso. — *Treviso.*

sto. **Russo** Giovanni, professore di Matematica, membro della Società Matematica di Francia e dell'Associazione Francese pel progresso delle Scienze; prof. titolare di Matematica nella Scuola Tecnica pareggiata di Catanzaro. — *Discesa Case Arse, 2 — Catanzaro.*

gio. **Schlegel** Victor, dottore in Filosofia, membro della Società Matematica di Francia. — *Hagen i/w. (Germania).*

;no. **Sforza** Giuseppe, dottore in Matematica, prof. nel R. Istituto Tecnico di Melfi. — *Melfi.*

le. **Starkoff** Alexis, membro della Società Matematica di Francia, della Società dei Naturalisti della Nuova Russia, della Sezione Matematica del Kazan e della Società Tecnica di Odessa. — *Deribasowskaja, 9 — Odessa.*

ɲno. **Torelli** Gabriele, dottore in Matematica, socio residente dell' Accademia Pontaniana, prof. nel R. Istituto Tecnico, coadjutore e libero docente nella R. Università di Napoli. — *S. Spirito di Palazzo, 41 — Napoli.*

INDICE

ESTRATTI DAI VERBALI

MEMORIE E COMUNICAZIONI

INDICE GENERALE

Fine della Parte 1ª del Tomo II (1888).

Tip. matematica di Michele Amenta, Palermo.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

ANNUNZIO

Col titolo « Biblioteca Matematica » il Circolo Matematico di Palermo pubblica un bollettino bibliografico della produzione matematica nazionale e straniera, il quale comprende:

nella rubrica **pubblicazioni periodiche**, il sommario degli articoli di matematica contenuti negli atti di Accademie, riviste e giornali di scienza, coi quali il Circolo scambia i suoi *Rendiconti;*

nella rubrica **pubblicazioni non periodiche,** l'elenco delle opere, memorie, note, etc. di matematica, che pervengono in dono alla biblioteca del Circolo.

Gli Autori, gli Editori e le Direzioni di Accademie, Società e Periodici scientifici, sono pregati di dirigere le pubblicazioni all' indirizzo:

Circolo Matematico — Via Ruggiero Settimo, 28 — Palermo.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO II.

PARTE SECONDA : BIBLIOTECA MATEMATICA

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
28, via Ruggiero Settimo, 28
1888.

BIBLIOTECA MATEMATICA

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE AL CIRCOLO

da settembre 1886 a dicembre 1887.

[*Vedi* gli Elenchi precedenti : pag. 19-44, 94-118 del tomo I].

Albeggiani, M. L. (Palermo). [*Vedi* t. I, pag. 29 e 94]. Generalizzazione di due teoremi riguardanti le parentesi d'ordine *n*. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. I, seduta del 14 novembre 1886.

Intorno ad alcune formole nella teorica delle funzioni ellittiche. *Ibid.* t. I, sedute del 24 aprile e 22 maggio 1887.

Amodeo, F. (Napoli). Monografia delle curve tautocrone. Avellino, 1883.

Sulle coniche bitangenti a due coniche. *Giorn. di Battaglini*, XXIV, 1886.

Della storia della geometria. Prelezione al corso libero di Geometria projettiva, letta il 24 novembre 1885. Napoli, 1886.

Sopra un particolare connesso (2, 2). *Rend. Acc. Napoli*, ottobre 1887.

Beltrami, E. (Pavia). [*Vedi* t. I, pag. 95]. Sulla teoria delle onde. *Rend. Istit. Lombardo*, XIX_2, 13 maggio 1886.

Sulle funzioni sferiche d'una variabile. *Ibid.*, XX_2, 16 giugno 1887.

Sulle funzioni complesse. *Ibid.*, XX_2, 14 luglio 1887.

Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. *Memorie dell'Acc. di Bologna*, $VIII_4$, 17 aprile 1887.

Bertini, E. (Pavia). [*Vedi* t. I, p. 31, 97]. Sui fasci di quadriche in uno spazio ad *n* dimensioni. *Rend. Acc. Lincei*, 1886.

Sulla geometria degli spazj lineari in uno spazio ad *n* dimensioni. *Rend. Istit. Lombardo*, XIX_2, 1886.

Sulla scomposizione di certe omografie in omologie (da una lettera al dottor S e g r e). *Atti Acc. Torino*, 1887.

Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque. *Rend. Istit. Lombardo*, XX_2, 1887.

Berzolari, L. (Vigevano). Sulla superficie del quart'ordine avente una conica doppia. *Ann. di Matem.*, $XIII_2$, 1885.

Besso, D. (Roma). Sull'integral seno e l'integral coseno. *Giorn. di Battaglini*, VI, 1868.

Del concetto di funzione nell' insegnamento della Geometria elementare. *Ibid.*, VII, 1869.

Sopra alcuni integrali doppi. 1872.

Sopra alcuni integrali definiti. 1872.

Sulla serie $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^\mu}$. *Giorn. di Battaglini*, X, 1872.

Sull'integrale $\int F(x)\, lx\, dx$, esteso fra limiti reali e positivi, quando la $F(x)$ sia una funzione razionale. *Ibid.*, XII, 1874.

Dimostrazione elementare di alcune formule pel calcolo dei seni e coseni. *Annuario del R. Ist. Tecnico di Roma*, 1879.

Teoremi elementari sui massimi e minimi. *Ibid.*, 1879.

Elementi di trigonometria piana e Appendice. Roma, Loescher, 1880.

Alcune proposizioni sulle equazioni differenziali lineari. *Rend. Acc. Lincei*, 1880-81.

Nozioni sui logaritmi e sugl'interessi composti. Roma, 1881.

Di alcune proprietà dell'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine, e di alcune equazioni algebriche. *Mem. Acc. Lincei*, XIV_3, 1882.

Sul prodotto di più soluzioni particolari d'un'equazione differenziale lineare omogenea, e specialmente sul prodotto di due soluzioni particolari dell'equazione differenziale omogenea del terz'ordine. *Ibid.*, XIV_3, 1882.

Di alcune proprietà dell'equazione differenziale lineare, non omogenea, del second'ordine. *Ibid.*, XIV_3, 1882.

Sopra una classe d'equazioni del sesto grado risolubili per serie ipergeometriche. *Ibid.*, XIV_3, 1882.

Sopra un notissimo fenomeno di rifrazione. *Annuario del R. Ist. Tecnico di Roma*, 1883.

Sulla durata dell'oscillazione del pendolo semplice circolare. *Ibid.*, 1883.

Sull'approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi. *Ibid.*, 1883.

Di una proprietà del triangolo sferico. *Ibid.*, 1883.

Di una classe d' equazioni differenziali lineari del terz' ordine integrabile per serie ipergeometriche. *Rend. Acc. Lincei*, 1883-84.

Di una classe di equazioni differenziali lineari del quart'ordine integrabile per serie ipergeometriche. *Ibid.*, 1883-84.

Sull'equazione del quinto grado. *Mem. Acc. Lincei*, XIX_3, 1884.

Sopra una classe di equazioni trinomie. *Ibid.* XIX_3, 1884.

Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine. *Ibid.*, XIX_3, 1884.

Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del quart' ordine e sull'equazione del quinto grado. *Rend. Acc. Lincei*, 1885.

Sulle equazioni trinomie ed in particolare su quelle del settimo grado. *Ibid.*, 1885.

Di alcune proprietà delle equazioni lineari omogenee alle differenze finite del 2° ordine. *Ibid.*, 1885.

Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del second'ordine e sull'equazione del quinto grado. *Ibid.*, 1886.

Brambilla, A. (Torino). [*Vedi* t. I, pag. 97]. Un teorema nella teoria delle polari. *Atti Acc. Torino*, XXII, 22 maggio 1887.

Capelli, A. (Napoli). [*Vedi* t. I, pag. 32 e 97]. Sopra un teorema che si collega strettamente colla formola che serve ad esprimere le forme algebriche di n serie di variabili n^{arie} per mezzo di potenze del determinante delle variabili e di forme che dipendono da sole $n - 1$ serie di variabili. *Rend. Circ. Matem.*, I, 30 maggio 1886.

Lezioni litografate di Fisica-matematica tenute nella R. Università di Palermo. 1884-85.

Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi nello spazio. *Annali di Matematica*, XIV_2, 1886.

Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen. *Math. Annalen*, XXIX, 1887.

Osservazioni sopra le relazioni che possono aver luogo identicamente fra le operazioni invariantive. *Rend. Acc. Napoli*, giugno 1887.

Casorati, F. (Pavia). [*Vedi* t. I, pag. 33 e 98]. Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. *Acta Mathematica*, VIII.

Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales Abéliennes et en particulier des fonctions inverses des intégrales elliptiques de 2me et 3me espèce. *Ibid.* VIII.

Catalan, E. (Liège). [*Vedi* t. I, pag. 98]. Sur les nombres de Segner. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. I, 19 dicembre 1886.

Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. *Bull. Acad. Belgique*, $XIII_3$, 1887.

Remarques sur une équation trinôme. *Ibid.*, $XIII_3$, 1887.

Sur un tableau numérique et sur son application à certaines transcendantes. *Mém. Acad. Belgique*, XLVII, 1887.

Remarques sur certaines intégrales définies. *Ibid.*, XLVII, 1887.

Cerruti, V. (Roma). Relazione della Commissione per l'esame comparativo dei programmi delle scuole classiche. Roma, 1887.

Cesàro, E. (Palermo). Note de Géométrie. Liège 1881.

Remarques arithmétiques. *Journal de Teixeira*, VI, 1883.

Algorithme isobarique. *Nouv. Annales de Math.*, III_3, 1884.

Intorno a talune funzioni isobariche-omogenee. *Giorn. di Batt.*, XXII, 1884.

Remarques sur les fonctions holomorphes. *Ibid.* XXII, 1884.

Studio di trasversali. *Ibid.* XXII, 1884.

Sur une équation aux différences mêlées. *Nouv. Ann. de Math.*, IV_3, 1885.

Note sur le calcul isobarique. *Ibid.*, IV_3, 1885.

Intorno a taluni determinanti aritmetici. *Rend. Acc. Lincei*, 1885.

Determinanti in Aritmetica. *Giorn. di Battaglini*, XXIII, 1885.

Sull'inversione delle identità aritmetiche. *Ibid.* XXIII, 1885.

Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche. *Ibid.* XXIII, 1885.

Considérations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mansion. *Annales scientifiques de l'École Normale*, II_3, 1885.

Excursions arithmétiques à l'infini. *Ann. di Matematica* $XIII_2$, 1885.

Sur l'étude des événements arithmétiques. *Mém. Acad. de Belgique*, XLVII, 1886.

Rapport de M. Catalan sur le Mémoire précédent.

Sur la distribution mutuelle des nombres polygones. *Nouv. Ann. de Math.* V_3, 1886.

Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. *Ibid.* V_3, 1886.

Sur un théorème de M. Lipschitz, et sur la partie fractionnaire des nombres de Bernoulli. *Ann. di Matem.* XIV_2, 1886.

Source d'identités. *Mathesis.*, VI, 1886.

Remarques sur une formule de Newton. *Ibid.*, VI, 1886.

Théorème d'Algèbre. *Ibid.*, VI, 1886.

Extraits d'une lettre de M. E. Cesàro à M. D'Ocagne. *Journal de Teix.* VII, 1886.

La rottura del diamante. *Giorn. di Battaglini*, XXIV, 1886.

Intorno ad una pretesa dimostrazione di termodinamica. *Ibid.* XXIV, 1886.

A proposito di un problema sulle eliche. *Ibid.* XXIV, 1886.

Alcune misure negli iperspazii. *Ibid.* XXIV, 1886.

Fonctions énumératrices. *Annali di Matematica*, XIV_2, 1886.

Intorno a taluni gruppi di operazioni. *Rend. Acc. Lincei*, 1886.

Formes algébriques à liens arithmétiques. *Ibid.*, 1886.

Intorno ad una classe di funzioni aritmetiche. *Giorn. di Batt.* XXV, 1887.

Medie ed assintotiche espressioni in Aritmetica. *Ibid.* XXV, 1887.

Remarques de Géométrie infinitésimale. *Mathesis*, VII, 1887.

Conti, I. (Palermo). Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia. *Rend. Circ. Matem.*, I, 13 febb. 1887.

Dainelli, U. (Como). [*Vedi* t. I, pag. 102]. Del moto di un punto materiale libero sollecitato da una forze diretta costantemente ad una retta fissa. *Mem. Acc. Bologna*, $VIII_4$, 1887.

Del Pezzo, P. (Napoli). [*Vedi* t. I, p. 112]. Sulla curva Hessiana. *Rend. Acc. di Napoli*, giugno 1883.

Intorno ad una proprietà fondamentale delle superficie e delle varietà immerse negli spazi a più dimensioni. *Ibid.*, febbrajo 1887.

Intorno alla rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio di punti a tre dimensioni. *Rend. Circ. Matem.*, I, 13 febbrajo 1887.

Sulle superficie dell' n^{o} ordine immerse nello spazio di n dimensioni. *Ibid.*, I, 10 aprile 1887.

Sulle superficie e le varietà degli spazi a più dimensioni le cui sezioni sono curve normali del genere p. *Ann. di Matem.*, XV_2, 1887.

Del Re, A. (Napoli). Oblique e circoli osculatori alle coniche in relazione tra loro ed in relazione con altri elementi geometrici di cui sono casi particolari. *Giorn. Battaglini*, XXII, 1884.

La quadrica dei dodici punti e la quadrica dei dodici piani. *Ibid.* XXII, 1884.

Sulle funzioni di forza. *Ibid.*, XXIII, 1885.

Nuova costruzione della superficie del quint'ordine dotata di curva doppia del quint'ordine. *Rend. Acc. di Napoli*, 1886.

Su certi luoghi che s'incontrano nello studio di tre forme geometriche fondamentali di 2ª specie proiettivamente riferite due a due. *Rend. Circolo Matem.*, I, 5 giugno 1887.

Alcune proprietà geometriche che potrebbero essere utili nella teorica dei sistemi di raggi luminosi. *Ibid.*, I, 19 giugno 1887.

Sulla congruenza (6, 2) delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche che si corrispondono in una determinata omografia non assiale nè omologica dello spazio. *Ibid.*, I, 19 giugno 1887.

De Paolis, R. (Pisa). [*Vedi* t. I, pag. 34 e 102]. Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari. *Mem. Acc. Lincei*, III_4, 1886.

Eneström, G. (Stockholm). [*Vedi* t. I, pag. 102]. Bevis för satsen, att den fullständiga integralen till en differensequation af *n*:te ordnigen innehåller *n* arbiträra konstanter. *Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar, N. 8, 1886, Stockholm.*

Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques. *Bibliotheca Mathematica*, Nouvelle Série, 1887.

Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. *Ibid.*, *Id.* 1887.

Table des matières des tomes I-X des « Acta Mathematica », 1887.

Fiedler, W. [*Vedi* t. I, pag. 103]. Geometrische Mittheilungen, V. *Vierteljahr. d. Naturf. Gesell. in Zürich*, XXV.

Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungs-Methoden. *Ibid.* XXVII.

Ueber die Büschel gleichseitiger Hyperbeln, den Feuerbach'schen Kreis und die Steiner'sche Hypocycloide. *Ibid.* XXX.

Zusätzliche Bemerkungen zu « Geometrische Mittheilungen V ». *Ibid.*

Zu zwei Steiner'schen Abhandlungen. *Ibid.*

Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln. *Ibid.*

Forsyth, A. R. (Cambridge). [*Vedi* t. I, pag. 103]. Note on a quasi-stereographic projection due to Gauss. *Quarterly Journal*, N° 84, 1886.

On Weierstrass's doubly-periodic Functions. *Ibid.*, N° 85, 1886.

Note on Weierstrass's Theory of doubly periodic Functions. *Messenger of Mathematics*, New Series, N° 179, March 1886.

Fouret, G. (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 103]. Sur une généralisation de la quadratrice. *Nouv. Ann. de Mathém.*, V_3, 1886.

Sur une généralisation du théorème de König concernant la force vive d'un système matériel. *Bull. Soc. Math. de France*, XIV, 1886.

Mémoire sur certains mouvements dans lesquels des arcs d'une même courbe

plane, comptés à partir d'une origine fixe, sont parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes. *Journ. de l' École Polytechnique,* LVI, 1886.

Sur une interprétation géométrique de l'équation différentielle

$$L\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)-M\frac{dy}{dx}+N=0,$$

dans laquelle L, M et N désignent des fonctions homogènes, algébriques, entières et d'un même degré, de x et y. *Comptes Rendus,* février 1886.

Sur certains problèmes d'isochronisme. *Ibid.,* 6 et 13 décembre 1886.

Gebbia, M. (Palermo). [*Vedi* t. I, pag. 35 e 104]. Intorno a una Nota di Valentino Cerruti. *Rend. Circ. Matem. di Palermo,* I, 5 giugno 1887.

Gerbaldi, F. (Roma). Primi elementi di Aritmetica. Libro di testo per le scuole elementari di Roma. Fascicoli 1°, 2° e 3°. F.lli Bocca, Roma, 1887.

La superficie di Steiner studiata sulla sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche. Torino, 1881.

Sopra il significato geometrico del covariante di 9° ordine di una forma cubica ternaria. *Atti Acc. Torino,* XV, 30 maggio 1880.

Sui gruppi di sei coniche in involuzione. *Ibid.,* 16 aprile 1882.

Nota sopra alcune applicazioni di una formola combinatoria. *Giornale di Battaglini,* XVIII.

Nota sul sistema simultaneo di due forme cubiche binarie. *Ibid.,* XVII.

Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di 3ª classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate proiettivamente. *Mem. Acc. Torino,* XXXII_2.

Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche. *Rend. Circ. Matem. Palermo,* I, seduta 28 luglio 1887.

Giudice, F. (Palermo). Considerazioni sulle radici dell'unità, con applicazioni alla teoria dei numeri. Numero dei valori di $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}$. Norma di una formula irrazionale. *Rivista di Matematica Elementare.* Novara, 1883.

Analisi indeterminata di 1° grado. *Ibid.,* 1883.

Equazioni cubiche e biquadratiche. *Ibid.,* 1883.

Equazioni simultanee di primo grado. *Ibid.,* 1883.

Sulla risoluzione delle equazioni algebriche. *Ibid.,* 1884.

Sul grado delle risolventi delle equazioni algebriche. *Ibid.,* 1884.

Applicazione della teoria svolta alle equazioni binomie. *Ibid.,* 1884.

Nota d'analisi indeterminata. *Ibid.,* 1885.

Sulla determinazione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali. *Rend. Circ. Matem.,* 4 aprile 1886.

Un teorema sulle sostituzioni. *Ibid.,* I, 19 dicembre 1886.

Sulle equazioni irriducibili di grado 1° risolubili per radicali. *Ibid.,* I, 13 marzo 1887.

Algebra ad uso delle scuole liceali. Palermo, Remo Sandron, 1887.

Guccia, G. B. (Palermo). [*Vedi* t. I, pag. 35 e 105]. Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. *Comptes Rendus,* CIII, 1886.

Generalizzazione di un teorema di N ö t h e r. *Rend. Circ. Matem.*, I, 13 giugno 1886.

Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali. *Ibid.*, I, 13 giugno 1886.

Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere *p*. *Ibid.* I, 13 febbrajo 1887.

Sui sistemi lineari di superficie algebriche dotati di singolarità base qualunque. *Ibid.* I, 27 febbrajo 1887.

Théorème sur les points singuliers des surfaces algébriques. *Comptes Rendus*, CV, 24 octobre 1887.

Günther, S. (München). A l b r e c h t D ü r e r, einer der Begründer der neueren Kurventheorie. *Bibliotheca Mathematica*, 1886, n°. 3.

Versuch einer schulmässigen Behandlung der Lehre von den Kreisen des sphärischen Dreiecks. *Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr.* XVII.

Die Geometrischen näherungskonstruktionen A l b r e c h t D ü r e r's. *Ansbach*, 1886.

Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen beziehungen. *München*, 1887.

Halphen, G. (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 35]. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. *Journ. de l'Éc. Polytech.*, LII, 1882.

Heinrichs, E. (Wermelskirchen). Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben. — Inaugural-Dissertation. Wermelskirchen, 1887.

Hirst, T. A. (London). [*Vedi* t. I, pag. 35 e 105]. On the C r e m o n i a n Congruences which are contained in a Linear Complex. *Proceed. London Math. Society*, XVII, 1886.

Hossfeld, C. (Apolda). [*Vedi* t. I, pag. 105]. Die reguläre Eintheilung des Raumes bei elliptischer Maassbestimmung. *Zeitschrift von Schlömilch*, XXXI, 1886.

Humbert, G. (Paris). Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. *Journal de l'École Polytechnique*, XLVIII, 1880.

Sur les courbes de genre un.—Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, 1885.

Sur les surfaces cyclides. *Journ. de l'École Polytechnique*, LV, 1885.

Application géométrique d'un théorème de J a c o b i. *Journal de Jordan*, I_4, 1885.

Application de la théorie des fonctions f u c h s i e n n e s à l'étude des courbes algébriques. *Ibid.*, II_4, 1886.

Sur le théorème d'A b e l et quelques-unes de ses applications géométriques. *Ibid.* III_4, 1887.

Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques. *Acta Mathematica*. X, 1887.

Jonquières, E. de (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 37 e 106]. Rapport sur le gyroscope-collimateur de M. G. F l e u r i a i s. *Comptes rendus*, CIII, 27 décembre 1886.

Théorie élémentaire d'après les méthodes de P o i n s o t du mouvement de la toupie et de son application à un horizon artificiel permettant d'obtenir à la mer la hauteur des astres. *Revue maritime et coloniale*, décembre 1886.

Recherche du nombre *maximum* de points doubles (*proprements dits et distincts*)

qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'ordre m, cette courbe devant d'ailleurs passer par d'autres points simples, qui complètent la détermination de la courbe. *Comptes Rendus*, CV, 14 novembre 1887.

Détermination du nombre maximum de points multiples d'un même ordre quelconque r, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique C_m, de degré m, conjointement avec d'autres points simples donnés en nombre suffisant pour compléter la détermination de la courbe. *Ibid.*, CV, 21 novembre 1887.

Génération des courbes unicursales, d'ordre et d'espèces quelconques. *Ibid.*, CV 12 décembre 1887.

Génération des surfaces algébriques, d'ordre quelconque. *Ibid.*, CV, 19 déc. 1887.

Jung, G. (Milano). [*Vedi* t. I, pag. 38 e 106]. Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie. *Rend. Istit. Lomb.*, XIX_2, 4 febb. 1886.

Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'uno dall'altro mediante trasformazioni birazionali. *Rend. Acc. Lincei*, 7 febbrajo 1886.

Sulle trasformazioni piane multiple. *Ibid.*, 21 novembre 1886.

Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale. *Ibid.*, 5 dicembre 1886.

Di una 3ª trasformazione di genere p e di grado $p + 1$ associata a ogni trasformazione piana birazionale. *Rend. Istit. Lomb.*, XIX_2, 25 novembre 1886.

Sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque. *Ibid.*, XX_2, 31 marzo 1887.

Sulle trasformazioni piane multiple di ordine minimo. *Ibid.*, XX_2, 12 maggio 1887.

Kronecker, L. (Berlin). [*Vedi* t. I, pag. 106]. Beweis dass für jede Primzahl p die Gleichung $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = 0$ irreductibel ist. *Crelle's Journal*, XXIX.

Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli. *Journal de Liouville*, I_2, 1856.

Addition au Mémoire sur les Unités complexes. *Comptes Rendus*, XIX, 1884.

Zur Theorie der elliptischen Functionen. *Sitzungsb. der k. Preuss. Akad. der Wissenschaften*, 29. Juli 1886.

Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. *Kronecker's Journal*, IC.

Ein Satz über Discriminanten-Formen. *Ibid.*, C.

Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. *Ibid.*, C.

Ueber den Zahlbegriff. *Ibid.*, CI.

Bemerkungen über die Jacobischen Thetaformeln *Ibid.*, CII.

Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. *Comptes Rendus*, CIII, 22 novembre 1886.

Laisant, C.-A. (Paris). Discours d'ouverture et Notice historique sur les travaux mathématiques de l'*Association française pour l'avancement des Sciences* de 1872 à 1878. *Congrès de Montpellier*, 1879.

Sur la transformation exponentielle. *Ibid. id.*

Giusto Bellavitis — Nécrologie. *Bulletin de Darboux*, IV_2, 1880.

Sur les développements de certains produits algébriques. *Assoc. franc.*, *Congrès d'Alger*, 1881.

Sur certaines questions de limites. *Ibid. id.*

Régions d'un plan et de l'espace. *Ibid. id.*

Théorème d'Algèbre. *Ibid., Congrès de la Rochelle*, 1882.

Simple remarque sur les podaires. *Ibid., id.*

Propriété du mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même. *Ibid.,id.*

Remarque sur la théorie des régions et des aspects. *Bull. Société Math. de France*, X, 1882.

Sur certaines propriétés des centres de gravité. *Ibid.*, X, 1882.

Sur un système de figures semblables dans un même plan. *Ass. franç., Congrès de Rouen*, 1883.

Remarque sur les intégrales définies. *Ibid., id.*

Théorie et applications des équipollences. Vol. in-8° de XXII-242 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1887.

andry, M. F. Théorème sur les réduites d'une nouvellle espèce de fractions continues. Paris, 1856. (Dono del sig. de Longchamps).

bon, E. (Paris). Sur l'arête de rebroussement d'une développable. *Bull. Société Math. de France*, VIII, 1880.

Nouvelle construction de la normale menée à une conique à centre d'un point de l'un de ses axes. *Paris*, 1881.

Note sur l'intersection d'une droite et d'une quadrique de révolution. *Paris*, 1882.

Mémoire sur l'épaisseur des berceaux horizontaux. *Paris*, 1883.

Notice nécrologique sur Jules de la Gournerie. *Paris*, 1883.

Note sur l'intégration des équations différentielles de la forme $F(p, px - y) = 0$. *Paris*, 1883.

Sur l'angle des lits oblique et normal de la vis Saint-Gilles. *Nouv. Annales de Mathém.*, III_3, 1884.

Théorie et applications des sections homothétiques de deux quadriques. *Paris*, 1884.

Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique. *Nouv. Ann. de Math.*, IV_3, 1885.

Théorie et construction de l'appareil hélicoidal des arches biaises. (Avec planches). *Paris*, 1887.

Paige, M. C. (Liège). [*Vedi* t. I, pag. 108]. Sur certains covariants d'un système cubo-biquadratique. *Bull. de l'Acad. de Belgique*, XLVI, 1878.

Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie. *Memoires de l'Acad. de Belgique*, XLII, 1879.

Notes d'analyse et de géométrie. *Mém. Soc. des sciences de Liège*, IX_2, 1879.

Sur quelques points de la théorie des formes algébriques. *Ibid.* IX_2, 1880.

Sur les déterminants bordés. *Bull. Soc. Math. de France*, VIII, 1880.

Sur la règle de multiplication des déterminants. *Ibid.*, IX, 1881.

Note sur la théorie des polaires dans les courbes géométriques. Prague, 1881.

Note sur la théorie des polaires. *Bull. Acad. de Belgique*, I_3, 1881.

Note sur l'involution biquadratique du troisième rang, et sur son application aux courbes du quatrième ordre. Prague, 1881.

Bemerkungen über cubische Involutionen. *Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. in Wien*, LXXXIII, 1881.

Ueber conjugirte Involutionen. *Ibid.* LXXXIV, 1881.

Sur la forme quadrilinéaire. *Atti Acc. di Torino*, XVII, 1882.

Sur quelques transformations géométriques uniformes. *Bull. Acad. de Belgique*, IV$_3$, 1882.

Ueber conjugirte Involutionen. *Sitzb. der k. Akad. des Wiss. in Wien*, LXXXV, 1882.

Sur les involutions cubiques. *Mém. Soc. des sc. de Liège*, XII$_2$, 1884.

Sur la forme quadrilinéaires. *Bull. Acad. de Belgique*, VIII$_3$, 1884.

Sur les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles. Prague, 1884.

Ueber die H e s s e' sche Fläche der Flächen dritter Ordnung. *Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. in Wien*, XCI, 1885.

Remarques sur la théorie de l'involution. 1885.

Sur le nombre des groupes communs à des involutions supérieurs marquées sur un même support. *Bull. Acad. de Belgique*, XI$_3$, 1886.

Lipschitz, R. (Bonn). Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale. *Kronecker's Journal*, CI, 1887.

Longchamps, G. de (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 109]. Notice nécrologique sur S. R e a l i s. *Journ. de Math. élém.*, 1886.

Sur un Mémoire de M. L a n d r y. *Paris*, 1884.

Sus les courbes parallèles et quelques autres courbes remarquables. *Journ. de Mathém. spéciales*, 1886.

Généralités sur la Géométrie du triangle. *Ibid.*, 1887.

Les points d'inflexion dans les cubiques circulaires unicursales droites. *Assoc. française pour l'avanc. des Sciences. Congrès de Nancy*, 1886.

Une conique remarquable du plan d'un triangle. *Ibid.*, *id.*

Sur la rectification de la trisectrice de M a c l a u r i n, au moyen des intégrales elliptiques. *Comptes Rendus*, 7 mars 1887.

Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites, au moyen des intégrales elliptiques. *Ibid.*, 4 avril 1887.

Sur la rectification de quelques courbes remarquables. *Mathesis*, VII, 1887.

Sur le Trifolium. *Journ. de Math. spéciales*, 1887.

Loria, G. (Genova). [*Vedi* t. I, pag. 109]. Il passato e il presente delle principali teorie geometriche.—Monografia storica.—*Mem. della R. Acc. di Torino*, XXXVIII$_2$, 1887.

Maisano, G. (Palermo). [*Vedi* t. I, pag. 39]. Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allgemeinen Curve des fünften Grades ausschneidet. *Math. Annalen*, XXIX, 1887.

Mannheim, A. (Paris). [*Vedi* t, I, pag. 40, 109]. Supplément à la Notice sur les travaux mathématiques de M. A. M a n n h e i m. *Paris*, 1887.

Marsilly (Général Commines de). (Auxerre).[*Vedi* t. I, pag. 110]. Énumeration des lignes courbes planes du 3^e degré. *Assoc. franç. avanç. Sciences, Congrès de Nancy*, 1886.

Martinetti, V. (Messina). [*Vedi* t. I, pag. 110]. Sulle configurazioni piane μ_3. *Annali di Matematica*, XV_2, 1886.

Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche. *Rend. Istit. Lomb.*, 31 marzo 1887.

Sopra una classe di sistemi lineari di curve piane algebriche. *Rend. Circ. Mat.*, I, 27 marzo 1887.

Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due. *Ibid.*, I, 10 aprile 1887.

Meyer, F. (Tübingen). [*Vedi* t. I, pag. 110]. Ein beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Mathem.-Naturw. Mitteil.* III, 1885.

Ueber die Projection einer Raumkurve von einem ihrer Punkte aus. *Ibid. id.*

Montferrier, A.-S. de. Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, avec supplément. Trois volumes. Bruxelles, 1838-40. (Dono del socio Dott. G. Amato-Pojero).

Noether, M. (Erlangen). [*Vedi* t. I, p. 42]. Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen. *Math. Annalen*, XXVIII.

Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke. *Ibid.*, XXIX.

Ocagne, M. d' (Rochefort $^s/_m$). [*Vedi* t. I, pag. 111]. Sur certaines déterminations de limites; moyennes limites de deux nombres. *Jornal de Teixeira*, VII, 1886.

Sur certaines sommations arithmétiques. *Ibid.*, VII, 1886.

Sur certaines fonctions symétriques; application au calcul de la somme des puissances semblables des racines d'une équation. *Ibid.* VII, 1886.

De la déviation dans l'ellipse. *Nouv. Ann. de Mathém.*, V_3, 1886.

Sur l'algorithme $[a\, b\, c\, \ldots\, l]^{(n)}$. *Ibid.*, V_3, 1886.

Sur une quartique unicursale. *Journ. de Math. spéciales*, 1886.

Sur certaines suites de fractions irréductibles. *Ann. Soc. sc. Bruxelles*, 1886.

Sur les sous-invariants des formes binaires. *Ibid.*, 1886.

Étude géométrique sur l'ellipse. Paris, 1886.

Sur certaine classe de suites récurrentes. *Comptes Rendus*, 14 février 1887.

Sur les péninvariants des formes binaires. *Ibid.*, 4 avril 1887.

Sur les péninvariants des formes binaires. *Ibid.*, 16 mai 1887.

Sur une classe de nombres remarquables. *American Journal of Mathematics*, IX, 1887.

Les coordonnées cycliques. *Mathesis*, VII, 1887.

Sur les courbes algébriques de degré quelconque. *Journal de Math. spéciales*, 1887.

Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques. *Ann. de l'École Normale*, IV_3, 1887.

Sur une propriété de la sphère et son extension aux surfaces quelconques. *Proceed. Lond. Math. Society*, XVIII, 1887.

Les coordonnées parallèles de points. *Nouv. Ann. Math.*, VI_3, 1887.

Quelques propriétés du triangle. *Mathesis*, VI, 1887.

Ovidio, E. d' (Torino). Sopra due punti della « Theorie der binären algebraischen Formen » del Clebsch. *Atti Acc. Torino*, XXII, 20 febbrajo 1887.

Padelletti, D. (Napoli). [*Vedi* t. I, pag. 112]. Ettore Caporali. *Annuario R. Univ. di Napoli*, 1886-87.

Parmentier (Général). (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 112]. Note sur la quadrature des courbes planes. *Mémorial de l'officier du Génie*, n° 26.

Distribution des petites planètes dans l'espace. *Revue d'Astronomie populaire*, 1883, n° 6.

Due fotografie dell'Autore con cenni biografici.

釉Paternò, F. P. (Palermo). Un teorema sulle h_i dei piani di un certo fascio e le sue applicazioni in un sistema generale di assi obliqui. *Giorn. scienze natur. ed econom. di Palermo*, XVIII, 1887.

Perrin, R. (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 112]. Sur la théorie des formes algébriques à p variables. *Comptes Rendus*, 10, 24 e 31 janvier 1887.

Sur les péninvariants des formes binaires. *Ibid.*, 18 avril et 9 mai 1887.

Picquet, H. (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 112]. Note sur le conoïde de Plücker. *Bull. Soc. Math. de France*, XIV, 1886.

Poncelet, J.-V. Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la Géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain. 2e édition, revue, corrigée et augmentée d'annotations nouvelles. 2 beaux volumes in-4 d'environ 450 pages chacun. Paris, Gauthier-Villars, 1865-66. (Dono della signora vedova Poncelet).

Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures; avec additions par MM. Mannheim et Moutard. 2 volumes in-8. Paris, Gauthier-Villars, 1862-64. (Dono della signora vedova Poncelet).

J.-V. Poncelet par X. Kretz. Extrait de la *Revue Alsacienne* de 1883. Paris, Berger-Levrault et Cie. (Dono della signora vedova Poncelet).

Retali, V. (Como). Sopra i sistemi di punti in linea retta. *Rend. Acc. Bologna*, 10 dicembre 1882.

Sopra una serie particolare di coniche. *Mem. Acc. Bologna*, V_4, 1884.

Sopra una proprietà focale della parabola. *Giorn. Battaglini*, XXII, 1884.

Sulle coniche coniugate. *Mem. Acc. Bologna*, VI_4, 1885.

Sopra la projezione immaginaria delle superficie del second'ordine e delle curve gobbe del quart'ordine. *Rend. Acc. Bologna*, 22 novembre 1885.

Osservazioni sulla projezione immaginaria delle curve del second' ordine. *Ibid.*, 11 aprile 1886.

Osservazioni analitico-geometriche sulla projezione immaginaria delle curve del second'ordine. *Mem. Acc. Bologna*, VII_4, 1886.

Sulle coniche coniugate degeneri. *Rend. Acc. Bologna*, 24 aprile 1887.

Sulle forme binarie cubiche. Nota di geometria immaginaria. *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, II, 18 dicembre 1887.

Rosanes, J. (Breslau). Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen. *Crelle's Journal*, LXXVI, 1873.

Ueber abhängige Punktsysteme und deren Bedeutung für die reciproke Verwandtschaft zweier Ebenen. *Ibid.*, 1883.

Zur Theorie gewisser abhängiger Punktgruppen im Raume. *Ibid.*, C, 1885.

Ruffini, F. P. (Bologna). [*Vedi* t. I, pag. 113]. Alcuni teoremi intorno alle linee del 2° ordine. *Rend. Acc. Bologna*, 28 novembre 1886.

Delle coniche polari inclinate per l'angolo zero principalmente in rispetto alle coniche coniugate. *Mem. Acc. Bologna*, VII_4, 1887.

Pietro Boschi. Parole dette innanzi al feretro addì 7 nov. 1887. Bologna.

Schoute, P. H. (Groningen). [*Vedi* t. I, pag. 43]. Bemerkung anlässlich des Aufsatzes von Herrn O. Hermes über eine gewisse Curve dritten Grades. *Kronecker's Journal*, IC.

Ein Steinersches Problem. *Ibid.* CI.

Sur les carrés magiques à enceinte. *Assoc. franç.; Congrès de Grenoble*, 1885.

Solution d'un problème de Steiner. *Bulletin de Darboux*, X_2, 1886.

Over een nauwer verband tusschen hoek en cirkel van Brocard. *Koninklijke Akad. van Wetensch.*, III_3. Amsterdam, 1886.

Ein Raumcoordinatensystem der Kreise einer Ebene. *Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. in Wien*, XCIV, 1886.

Sur les normales d'angle α. *Mathesis*, VII, 1887.

Sur le complexe des droites dont les distances à deux droites données sont entre elles dans un rapport constant. *Ann. École Polytech. de Delft*, III.

chur, F. (Leipzig). [*Vedi* t. I, pag. 114]. Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses. *Math. Annalen*, XXVII.

Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen. *Ibid.*, XXVII.

uola di applicazione per gl'ingegneri (Roma). [*Vedi* t. I, pag. 43]. 4° Supplemento al catalogo della biblioteca (1886). — Indice generale della Biblioteca (1887).

gre, C. (Torino). Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere, e sulle loro mutue analogie. *Atti Acc. Torino*, XIX, 30 dicembre 1883.

Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque. *Ibid.* XIX, 10 febbrajo 1884.

Sull'equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità, e su alcune questioni geometriche affini. *Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei* XL),VI_3, 29 settembre 1884.

Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Mem. Acc. Torino*, $XXXVI_2$, 1884.

Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche. *Ibid.* $XXXVI_2$, 1884.

Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Mem. Acc. Lincei*, XIX, 6 aprile 1884.

Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque. *Atti Acc. Torino*, XIX, 25 maggio 1884.

Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta. *Mem. Acc. Torino*, $XXXVII_2$, 1885.

Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette. *Atti Acc. Torino* XX, 8 febbrajo 1885.

Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani *Ibid.*, XXI, 13 dicembre 1885.

Le coppie di elementi imaginari nella geometria projettiva sintetica. *Mem. Acc. Torino*. XXXVIII$_2$, 1886.

Sugli spazi fondamentali di un'omografia. *Rend. Acc. Lincei*, 2 maggio 1886.

Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine. *Atti Acc. Torino* XXI, 20 giugno 1886.

Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque. *Ibid.* XXII, 6 febbrajo 1887.

Su alcune proprietà metriche delle correlazioni. *Giorn. di Battaglini*, XXV, 1887.

Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere *p*. (Estratto di lettera al dott. Guccia). *Rend. Circ. Matem.*, I, 24 aprile 1887.

Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni. *Atti Acc. Torino*, XXII, 22 maggio 1887.

Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. *Math. Annalen*, XXX, 1887.

Sur un théorème de la géométrie à *n* dimensions. *Ibid.*, XXX, 1887.

Intorno alla geometria su una rigata algebrica. *Rend. Acc. Lincei*, 3 luglio 1887.

Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi. *Ibid.*, 2 ottobre 1887.

Stolz, O. (Innsbruck). [*Vedi* t. I, pag. 116]. Die Axen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punkt-Coordinaten. *Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. in Wien*, LV, 1867.

Ueber die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlicher. *Ibid.*, LVIII, 1868.

Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Professor Dr. E. Weiss: « Entwicklungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem etc. ». *Ibid.* XCV, 1887.

Ueber die Lambert'sche Reihe. *Ibid.*, XCV, 1887.

Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte zweier algebraischer Curven *m*-ter und *n*-ter Ordnung $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$. *Berichten des naturw.-medizin. Vereines in Innsbruck*, 1879.

Zur Theorie der elliptischen Functionen. *Ibid.*, 1881-82.

Ueber die Partialbruchzerlegung der Function $e^{a\zeta} : (e^{\zeta} - 1)$. *Ibid.*, 1885.

Ueber Convergenz und Divergenz reinperiodischer Kettenbrüche. *Ibid.*. 1887-88.

Bemerkungen zur Theorie der Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. *Ibid.*, 1887-88.

Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth. *Math. Annalen*, XXIII.

Ueber unendliche Doppelreihen. *Ibid.* XXIV.

Sturm, R. (Münster *i/W*). [*Vedi* t. I, pag. 116]. Zur Theorie der Collineation und Correlation. *Math. Annalen*, XXVIII.

Ueber gleiche Punktreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel bei collinearen Räumen. *Ibid.*, XXVIII.

Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bundel-und Feldgrade. *Kronecker's Journal*, CI.

Die Entwickelung der Geometrie. (Rectoratsrede, gehalten in Münster am. 15 October 1886). *Preussischen Jahrbücher*, LX.

Tirelli, F. (Salerno). Le fonti della geometria d'Euclide. Parte 1ª, 2ª, 3ª e 4ª. Napoli, 1884-86.

Vaněček, J.-S. (Jičině). [*Vedi* t. I. pag. 116]. Sur le réseau de coniques du deuxième indice. *Zvláštni otisk ze zpráv o zasedáni král. českė společnosti nauk. Předneśeno dne* 7. *května* 1886.

Sur le réseau de coniques du 2 nième indice. *Ibid.*, 21 května 1886.

Sur le faisceau de coniques du 2 nième indice. *Ibid.*, 25 juin 1886.

Vaněček, J.-S. et M.-N. [*Vedi* t. I, pag. 117]. Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces. *Annali di Matematica*, XIV$_2$, 1886.

Venturi, A. (Palermo). Teoria del moto della Terra attorno al suo centro di gravità. *Cronaca del R. Liceo Ginnasio Volta* (*1877-78*). Como, 1879.

Sul moto perturbato delle comete — Tesi per l'esame di abilitazione all'insegnamento (1880). *Ann. Scuola Norm. Pisa*, III, 1883.

Metodo di Hansen per calcolare le perturbazioni dei piccoli pianeti, intieramente rifuso ed originalmente esposto. *Pubblicazioni del R. Osserv. di Brera in Milano*, N. XXII.

Le perturbazioni assolute di Feronia 72 prodotte dall'attrazione di Giove — Memoria premiata al concorso pel premio reale di Astronomia dell'anno 1884. *Mem. Acc. Lincei* III$_4$, 1886.

Vivanti, G. (Mantova). Démonstration d'un théorème sur les périodes de la fonction elliptique *p u*. *Ann. École Normale*, II$_3$, 1885.

Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante. *Zeitschrift für Mathem. u. Physik*, XXXI, XXXII.

Alcuni teoremi sulle funzioni intere. *Giorn. Battaglini*, XXII, 1884.

Rettifica alla Nota « Alcuni teoremi sulle funzioni intere ». *Ibid.* XXII, 1884.

Sulle funzioni intere trascendenti. *Ibid.*, XXIII, 1885.

Ricerche sulle funzioni uniformi d'un punto analitico. *Ibid.*, XXV, 1887.

Una parabola dinamica — Discorso pronunciato da Robert Stawell Ball all'Associazione Britannica per l'avanzamento delle scienze il 1° sett. 1887 — Traduzione dall'inglese. *Politecnico*, 1887.

Volterra, V. (Pisa). [*Vedi* t. I, pag. 44 e 117]. Sulle equazioni differenziali lineari. *Rend. Acc. Lincei*, 15 maggio 1887.

Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. *Mem. Soc. Italiana delle Scienze* (*detta dei* XL), VI$_3$, 1887.

Zeuthen, H.-G. (Kiöbenhavn). [*Vedi* t. I, pag. 118]. Note sur un problème de Steiner. *Bulletin de Darboux*, XI$_2$, avril 1887.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.

VOLUME III (1887) — PRIMO SEMESTRE.

Ricci: Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale.
Visalli: Sulle correlazioni (in due spazi a tre dimensioni) che soddisfano a dodici condizioni elementari.
Visalli: Sulle figure generate da due forme fondamentali di seconda specie, fra le quali esiste una corrispondenza multipla $(1, m)$ di grado n.
Pieri: Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni.
Sandrucci: Su l'accordo della teoria cinetica dei gas colla Termodinamica e sopra un [illegible] principio della cinetica ammesso finora come vero.
Brioschi: Sulle funzioni sigma iperellittiche (Nota I).
Brioschi: Sulle funzioni sigma iperellittiche (Nota II).
Bianchi: Sopra i sistemi doppiamente infiniti di raggi (Congruenze).
Pincherle: Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari.
Volterra: Sulle equazioni differenziali lineari.
Sandrucci: Sulla equazione fondamentale e sulla pressione interna dei vapori saturi.
Cancani: Sopra i coefficienti termici dei magneti.

VOLUME III (1887) — SECONDO SEMESTRE.

Segre: Intorno alla geometria su una rigata algebrica.
Volterra: Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota I).
Volterra: Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota II).
Segre: Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi.
Volterra: Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Nota III).
Besso: Di alcune equazioni alle derivate parziali del prim'ordine.
Bianchi: Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante.
Siacci: Sugli angoli di massima gittata.
Volterra: Sopra le funzioni dipendenti da linee (Nota I).
Pizzetti: Sulla compensazione delle osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati.
Volterra: Sopra le funzioni dipendenti da linee (Nota II).
Volterra: Sopra un'estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse.
Pizzetti: Sulla compensazione delle osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati (Nota II).
Pincherle: Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

Serie quarta—Tomo VII (Sezione delle scienze fisiche e matematiche), 1887:

Beltrami: Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell.
Pincherle: Studi sopra alcune operazioni funzionali.
Righi: Studi sulla polarizzazione rotatoria magnetica; con una tavola.
Retali: Osservazioni analitico-geometriche sulla projezione immaginaria delle curve del second'ordine.
Benetti: Teoria generale delle pompe centrifughe; con una tavola.
Ruffini: Delle coniche polari inclinate per l'angolo zero principalmente in rispetto alle coniche conjugate.

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli.

[*Vedi* t. I, pag. 391]:

Serie II. — Vol. I. — Anno XXVI (1887). — Fasc. 7-12 (luglio-dicembre).

Battaglini: Rapporto intorno alla Nota del dott. M. Pannelli.
Pannelli: Sulle trasformazioni multiple involutorie di due spazi.
Battaglini: Rapporto intorno alla Nota del dott. A. Del Re.
Del Re: Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti.
Battaglini: Rapporto intorno alla Nota del dott. A. Pascal.
Pascal: Sopra un nuovo simbolo nella teoria delle forme binarie a due serie di variabili.
Battaglini: Rapporto intorno alla Nota del dott. F. Amodeo.
Amodeo: Sopra un particolare connesso (2, 2).
Capelli: Determinazione delle operazioni invariantive, fra due serie di variabili, permutabili con ogni altra operazione della stessa specie.
Battaglini: Rapporto intorno alla Nota del dott. E. Pascal.
Pascal: Sopra un metodo per esprimere una forma invariantiva qualunque di una binaria cubica, mediante quelle del sistema completo.

American Journal of Mathematics.

[*Vedi* t. I, pag. 391].

Volume X. — Number 1 (October 1887):

Sylvester: Lectures on the Theory of Reciprocants XXXIII-XXXIV.
Moore: Algebraic Surfaces of which every Plane-Section is Unicursal in the Light of n-Dimensional Geometry.
Jenkins: On Professor Cayley's Extension of Arbogast's Method of Derivations.

MacMahon: Properties of a Complete Table of Symmetric Functions.
Bolza: On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves.
Cayley: On the Transformation of Elliptic Functions (Sequel).
Johnson: Symbolic Treatment of Exact Linear Differential Equations.

VOLUME X. — NUMBER 2 (January 1888):

Young: Solvable Quintic Equations with Commensurable Coefficients.
Barcroft: Forms of Non-Singular Quintic Curves. (With 12 Plates).
Morley: On Critic Centres.
MacMahon: The Expression of Syzygies among Perpetuants by means of Partitions.
Faà de Bruno: Démonstration directe de la formule Jacobienne de la transformation cubique.
Morley: Note on Geometric Inferences from Algebraic Symmetry.
Appel: Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux.

Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).

SERIE TERZA. — TOMO VI.

D'Ovidio: Cenni biografici su Domenico Chelini.
D'Ovidio: Cenni biografici su Barnaba Tortolini.
D'Ovidio: Biografia di Giusto Bellavitis.
D'Ovidio: Cenni biografici su Giovanni Plana.
Genocchi: Intorno alla funzione $\Gamma(x)$ e alla serie dello Stirling che ne esprime il logaritmo.
Genocchi: Ancora la serie dello Stirling (appendice alla precedente Memoria).
Segre: Sull' equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità, e su alcune questioni geometriche affini.
Volterra: Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.

Bulletin de la Société Philomatique de Paris.

[*Vedi* t. I, pag. 397].

SEPTIÈME SÉRIE — TOME XI (1886-1887) — NUMERO 4:

M. *Lévy* fait une communication sur un postulatum qui se présente dans la mesure de l' aire d'un parallélogramme.

M. *André* entretient la Société d' un procédé analytique pour obtenir le nombre des manières de décomposer un nombre entier u en une somme de m nombres entiers.

M. *André* fait connaître l' expression générale de la dérivée $n^{\text{ème}}$ du produit d'un nombre quelconque de facteurs. Cette expression est tout à fait identique à la puissance $n^{\text{ème}}$ d'un polynôme et comprend la formule de Leibnitz comme premier cas particulier.

Bulletin de la Société Mathématique de France.
[*Vedi* t. I, p. 396].

TOME XV (1887) — N^{os}. 6 et 7 (dernier) :

Carvallo: Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches (suite).
Presle (*de*): Démonstration de la loi d'inertie des formes quadratiques.
Tissot: Lettre sur une Note insérée au Bulletin.
André: Théorème sur les formes quadratiques.
Anglin: Sur le coefficient du terme général dans certains développements.
Laisant: Théorème de Trigonométrie.
Poincaré: Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.
Presle (*de*): Développement en produit des fonctions Θ et H de Jacobi et recherche des valeurs de ces fonctions quand les périodes sont divisées par un nombre entier.

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario
[*Vedi* t. I, pag. 395].

ANNO II (1887) — FASC. 5-6 (sett.-dic.):

Bettazzi: Sul concetto di numero (Continuazione e fine).
Rindi: Un teorema sul triangolo.
Panizza: Nota su alcuni triangoli dipendenti da un triangolo acutangolo dato.
Lugli: Sulle frazioni decimali periodiche.
Andreini: Dimostrazione del teorema di Tolemeo col metodo intuitivo.
Sadun: Su alcuni teoremi relativi alla divisione algebrica.
Nonni: Un problema di probabilità.

Comptes Rendus hebd. des séances de l'Académie des Sciences.

TOME CVI (PREMIER SEMESTRE 1888).

N° 1 — 2 janvier:

Bertrand: Sur l'association des électeurs par le sort.
Jonquières (*de*): Détermination du nombre maximum des points doubles, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une surface algébrique de degré m, dont la détermination est complétée par d'autres points simples donnés.
Rouché: Sur un problème relatif à la durée du jeu.
Bertrand: Démonstration du théorème énoncé par M. E. Rouché dans la Note précédente.
Koenigs: Détermination, sous forme explicite, de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques, et en particulier de toutes les surfaces réglées à lignes asymptotiques algébriques.

Demartres: Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement une suite de cercles.

Nº 2 — 9 janvier:

Picard: Remarques sur les groupes de transformations relatifs à certaines équations différentielles.

Lucas, F: Généralisation du théorème de Rolle.

Riemann: Sur une généralisation du principe de Dirichlet.

Defforges: Sur la mesure de l'intensité absolue de la pesanteur.

Nº 3 — 16 janvier:

Bertrand: Sur la loi de probabilité des erreurs d'observation.

Jonquières (de): Sur un trait caractéristique de dissemblance entre les surfaces et les courbes algébriques, d'où dépendent les limites respectives des nombres de points doubles qu'il est permis de leur attribuer arbitrairement.

Lelieuvre: Sur les lignes de courbure et les lignes asymptotiques des surfaces.

Lerch: Sur une formule d'Arithmétique.

Goursat: Sur les systèmes d'équations linéaires qui sont identiques à leur adjoint.

Ocagne (d'): Sur la détermination du chiffre qui, dans la suite naturelle des nombres occupe un rang donné.

Defforges: Sur la mesure de l'intensité absolue de la pesanteur.

Lucas, F.: Détermination électrique des racines réelles et imaginaires de la dérivé d'un polynôme quelconque.

Nº 4 — 23 janvier:

Tisserand: Remarque à l'occasion d'une Communication de M. J. Bertrand.

Bertrand: Probabilité du tir à la cible.

Jonquières (de): Sur quelques notions, principes et formules, qui interviennent dans plusieurs questions concernant les courbes et les surfaces algébriques.

Rouché: Sur la durée du jeu.

Voyer: Sur un problème du Calcul des probabilités.

Humbert: Sur les lignes de courbure des cyclides.

Hadamard: Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable.

Autonne: Sur l'application des substitutions quadratiques crémoniennes à l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre.

Pincherle: Sur une généralisation des fonctions eulériennes.

Lucas, F.: Résolution électrique des équations algébriques.

Nº 5 — 30 janvier:

Rouché: Sur la durée du jeu.

Demartres: Sur la surface engendrée par une conique doublement sécante à une conique fixe.

uret: Sur quelques propriétés géométriques des stelloïdes.
rvallo: Formules d'interpolation.

N° 6 — 6 février :

rtrand: Seconde Note sur la probabilité du tir à la cible.
lvester: Sur les nombres parfaits.
mabrea: Note relative à la publication d'une nouvelle édition des Œuvres de Galilée, par M. Favaro.

N° 7 — 13 février :

rtrand: Sur la détermination de la précision d'un système de mesures.
lvester: Sur une classe spéciale des diviseurs de la somme d'une série géométrique.
unel: Sur les racines des matrices zéroïdales.
oulain: Théorèmes sur les équations algébriques et les fonctions quadratiques de Campbell.
ainlevé: Sur la représentation conforme des polygones.
lumbert: Sur quelques propriétés des aires sphériques.
lmagat: Sur la vérification expérimentale des formules de Lamé et la valeur du coefficient de Poisson.
Brillouin: Déformations permanentes et Thermodynamique.

N° 8 — 20 février :

ertrand: Troisième Note sur la probabilité du tir à la cible.
lvester: Sur l'impossibilité de l'existence d'un nombre parfait impair qui ne contient pas au moins cinq diviseurs premiers distincts.
nquières (de): Construction géométrique de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs.
ainlevé: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.
rillouin: Déformations permanentes et Thermodynamique.

N° 9 — 27 fevrier :

ertrand: Sur la rigueur d'une démonstration de Gauss.
ucas, F.: Détermination électrique des lignes isodynamiques d'un polynôme quelconque.
Brillouin: Déformations permanentes et Thermodynamique.

N° 10 — 5 mars :

ertrand: Sur l'indétermination d'un problème résolu par Poisson.
Sylvester: Sur les nombres parfaits.
Lucas, F.: Résolution immédiate des équations au moyen de l'électricité.
Méray: Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui sont dépourvus d'intégrales, contrairement à toute prévision.
Darboux: Remarque sur la Communication précédente.

Bougaieff: Sur une intégrale numérique suivant les diviseurs.
Pellet: Sur les surfaces réglées, applicables sur une surface de révolution.

N° 11 — 12 mars:

Bertrand: Sur la combinaison des mesures d'une même grandeur.
Jensen: Sur un théorème général de convergence.
Ocagne (d'): Sur les équations algébriques à racines toutes réelles.
Fabry: Réductibilité des équations différentielles linéaires.

N° 12 — 19 mars:

Bertrand: Sur la valeur probable des erreurs les plus petites, dans une série d'observations.
Tisserand: Sur un point de la théorie de la Lune.
Mannheim: Sur certains conoïdes et en particulier sur le conoïde de Plücker.
Bortniker (Mlle): Sur la théorie des cyclides.
Bioche: Sur certaines surfaces réglées, à propos d'une Note de M. Pellet.
Jamet: Sur deux systèmes de courbes orthogonales.
Jensen: Sur une généralisation d'un théorème de Cauchy.

N° 13 — 26 mars:

Bertrand: Sur l'évaluation *a posteriori* de la confiance méritée par la moyenne d'une série de mesures.
Jonquières (de): Construction géométrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré déterminée par diverses conditions données.
Hatt: Sur l'évaluation des erreurs inhérentes au système des coordonnées rectangulaires.
Carvallo: Sur l'application de la méthode des moindres carrés.
Kœnigs: Sur la distribution des volumes engendrés par un contour fermé, tournant autour de toutes les droites de l'espace.
Saint-Loup: Sur la trisection de l'angle.

Journal de Mathématiques élémentaires.

[*Vedi* t. I, pag. 394].

IIIe Série — XIe Année (1887) — Nos 9-12 (sept.-déc.):

Vigarié: Sur quelques cercles remarquables (cercles de Neuberg et de M' Cay).
Longchamps (de): Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre (2e partie).
Thiry: Note sur le quadrilatère harmonique.
Boutin: Note de géométrie — Exercices divers.

Journal de Mathématiques spéciales.
[*Vedi* t. I, pag. 395].

IIIe Série — XIe Année (1887) — Nos 9-12 (sept.-déc.) :

Aubry : Sur la cubique aux pieds des normales issues d'un point à une surface du second degré (*suite et fin*).

Ocagne (*d'*) : Note sur la cardioïde de Maclaurin.

Vigarié : Géométrie du triangle (étude bibliographique et terminologique) (*suite*).

Longchamps (*de*) : Sur le trifolium.

Pomey : Condition pour qu' un point soit extérieur à une conique.

Lebel : Note sur la strophoïde oblique.

Comunicazioni e protocolli delle sedute della Società Matematica di Karkoff. (*)

Anno 1879.

Imschenetsky : Determinazione della forza che mette in movimento un punto materiale sopra la conica, in funzione delle coordinate del punto.

Delarue : Nota sulla convergenza delle serie infinite.

Imschenetsky : Problema — Dividere l'area d'un trapezio dato in n parti eguali, mediante rette parallele ai due lati paralleli.

Grouzinzeff : Calcolo del cammino dei raggi nel cristallo doppiamente rifrangente.

Andréieff : Sulla costruzione delle polari delle curve geometriche piane.

Anno 1880.

Kloutschnikoff : Riduzione alla forma canonica delle equazioni del movimento relativo del sistema di punti materiali.

Imschenetsky : Equazione canonica differenziale del filo flessibile e inestensibile e brachistocrona nel caso di forze potenziali.

Froloff : Nota sopra una questione della enumerazione grafica.

Graindorge : Note sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\operatorname{cotang} x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Imschenetsky : Integrazione delle equazioni differenziali lineari del 2° ordine per mezzo dell'addizione.

Grouzinzeff : Teoria matematica dei fenomeni della riflessione e della rifrazione della luce polarizzata sopra i mezzi isotropi.

(*) La versione dal russo è dovuta alla cortesia del signor A. de Troiansky, console generale in Palermo di S. M. l' Imperatore delle Russie.

V. I. : Rivista bibliografica dell'opera: *Principj d'Euclide* di *Vaschenko-Zakarchenko.*

Andréieff: Principi della Geometria projettiva.

Andréieff: Carlo-Giorgio-Cristiano von Staudt.

Imschenetsky : Nota sulle funzioni di variabili complesse.

ANNO 1881.

Ermakoff: Sull'integrazione delle equazioni differenziali.

Andréieff: Michele Chasles.

Levitzky : Comunicazione a proposito della Memoria del prof. Günther: « Un problema dell'Astronomia sferica ». (*Zeitschrift* 1881).

Andréieff: Sui poligoni di Poncelet.

Grouzinzeff: Sopra un caso particolare della riduzione delle equazioni del 4° grado alle equazioni biquadratiche.

ANNO 1882.

Grouzinzeff: Sulla doppia rifrazione in connessione collo splendore della luce.

Tchebicheff: Espressione approssimata degli integrali mediante altri presi negli stessi limiti.

Imschenetsky: Sull'ineguaglianza che limita la grandezza dell'integrale determinato delle equazioni di funzioni.

Andréieff: Brevi cenni in ordine alla teoria di Tchebicheff e Imschenetsky sugl'integrali determinati delle equazioni di funzioni.

Grouzinzeff: Risoluzione delle equazioni fondamentali della teoria della polarizzazione cristallina.

ANNO 1883.

Possé: Sull'articolo addizionale di Tchebicheff in ordine alla formola per esprimere approssimativamente un integrale determinato mediante altri presi negli stessi limiti.

Andréieff: Alcune generalità sulla questione della decomposizione dell'integrale determinato secondo la formola proposta dal signor Tchebicheff.

Novikoff: Un caso eccezionale di massima e minima delle funzioni a più variabili.

Tichomandritzky : Osservazioni sull'introduzione della funzione Θ nella teoria delle funzioni ellittiche.

Tichomandritzky : Deduzione dei problemi essenziali della teoria degli integrali ellittici indipendentemente dalla forma canonica della funzione sotto il radicale.

Markoff: Determinazione dei valori massimi e minimi d'una grandezza qualunque.

Markoff: Dimostrazione di alcune ineguaglianze di Tchebicheff.

Alekseiewsky: Sull' integrazione dell'equazione

$$x^2 y''' + Axy'' + By' + Cx^p y = 0.$$

Floroff: Nota sull'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(a e^x + 2\right)\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Floroff: Sulle condizioni d'integrazione dell'equazione

$$\frac{d^3u}{dx^3}+x^m u=0.$$

ANNO 1884.

Floroff: Sull'equazione di Riccati.

Grouzinzeff: Sul sistema d'Abul-Dgoude per determinare i lati dei poligoni simmetrici inscritti.

Alekseiewsky: Sull'integrazione dell'equazione

$$\frac{d^n y}{dz^n}+\frac{\alpha}{z}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\beta y=0.$$

Novikoff: Sul significato che si può attribuire alla forza dinamica della 2ª variazione degli integrali determinati di Hamilton e della minima azione.

Ptachitzky: Sulla trasformazione, nella serie di Maclaurin, di alcune funzioni a più variabili.

Alekseiewsky: Nota sulla generalizzazione dell'equazione di Riccati.

Markoff: Determinazione d'una funzione colla condizione della minima deviazione dallo zero.

Grouzinzeff: Sullo studio della posizione stazionaria nel mezzo elastico isotropo.

Andrèieff: Sui poligoni di Poncelet (2ª parte).

Floroff: Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari.

Tichomandritzky: Sull'inversione degl'integrali ellittici.

Toropoff: Sull'integrazione di alcune equazioni differenziali ordinarie.

Grouzinzeff: Sull'applicazione della legge della conservazione della forza.

Alekseiewsky: Sull'integrazione dell'equazione differenziale lineare dell'ordine n.

Grouzinzeff: Sulla teoria elettromagnetica della polarizzazione della luce.

Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique.

[*Vedi* t. I, pag. 391].

LVIe ANNÉE. — IIIe SÉRIE. — TOME XIV (juillet-décembre 1887):

Deruyts (*J*): Développements sur la théorie des formes binaires.

Le Paige et *Mansion*: Rapport sur le travail précédent.

Le Paige: Sur les éléments neutres des involutions.

Deruyts (*F.*): Sur la représentation des involutions unicursales.

Le Paige: Rapport sur la travail précédent.

Deruyts (*F.*): Sur la théorie de l'involution.

Le Paige et *Mansion*: Rapport sur le travail précédent.

Ronkar: Note sur les oscillations d'un pendule produite par le déplacement de l'axe de suspension.

Folie: Rapport sur le travail précédent.

Tilly (de): Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie, en Mécanique (Discours prononcé dans la séance publique du 16 décembre 1837).

Memoires de la Société Royale des Sciences de Liège

[*Vedi* t. I, pag. 397].

IIe Série. — Tome XIV (Janvier 1888):

Deruyts (J.): Sur une classe de polynômes analogues aux fonctions de Legendre.

Deruyts (J.): Sur certains systèmes de polynômes associés.

Deruyts (F.): Génération d'une surface du troisième ordre.

Deruyts (F.): Sur quelques transformations géométriques.

Studnička: Sur l'analogue hyperbolique du nombre Π.

Folie: Traité des réductions stellaires.

Bulletin des Sciences Mathématiques.

IIe Série. — Tome XII (1888).

Janvier:

Schoenflies: Sur les courbes et surfaces décrites pendant le mouvement à cinq conditions.

Weyr (Ed.): Extrait d'une Lettre à M. Hermite.

Kœnigs: Un théorème concernant la surface de Steiner, et l'ensemble de trois coniques qui se coupent dans l'espace.

Février:

Kopteyn: Note sur les différentielles binômes.

Mars:

Gilbert: Sur la convergence des intégrales à limites infinies.

Avril:

Lerch: Sur une formule d'Arithmétique

Nouvelles Annales de Mathématiques.

IIIe Série. — Tome VII (1888)

Janvier:

Humbert: Sur les arcs des courbes planes.

Marchand: Solution de la question proposée au concours général de 1885.

Marchand: Solution de la question proposée au concours général de 1886.

Stieltjes: Sur une généralisation de la formule des accroissements finis.
Faure: Sur un théorème de M. Chasles.
Astor: Théorème de Minding.

Février:

Cesàro: Sur la convergence des séries.
Laurent: Sur la théorie de l'élimination.
Pomey: Sur le plus grand commun diviseur de deux polinômes entiers.
Hoffmann: Sur l'existence de trois racines réelles de l'équation qui détermine les axes principaux d'un cône.
Worontzoff: Sur un théorème de M. Weill.
Cesàro: Sur les cercles inscrits à un triangle.
Rouou: Solution géométrique de la question 1567.

Proceedings of the London Mathematical Society.

Vol. XVI. — Twenty-First Session (1884-85):

Roberts: On Certain Conics connacted with a Plane Unicursal Quartic.
Buchheim: On the Theory of Screws in Elliptic Space (Supplementary Note)
Lamb: On the Motion of a Viscous Fluid contained in a Spherical Vessel.
Roberts: Notes on the Plane Unicursal Quartic.
Cayley: The Binomial Equation $x^p - 1 = 0$; Quinquisection: Second Note.
Buchheim: On the Theory of Matrices.
Griffiths: Results from a Theory of Transformation of Elliptic Functions.
Jeffery: On Sphero-Cyclides.
MacColl: On the Limits of Multiple Integrals.
Spottiswoode: On Quadric Transformations.
Hill: The Differential Equations of Cylindrical and Annular Vortices.
Neuberg: Sur les figures semblablement variables.
Larmor: On the Extension of Ivory's and Jacobi's Distance-Correspondences for Quadric Surfaces.
Sylvester: Note on Certain Elementary Geometrical Notions and Determinations.
Walker: On a Method in the Analysis of Plane Curves, Part II.
Elliott: On Eliminants, and Associated Roots.
Hirst: On Congruences of the Third Order and Classe.
Roberts: On the Arguments of Points on a Surfaces.
Routh: On some Properties of certain Solutions of a Differential Equation of the Second Order.
Larmor: On the Flow of Electricity in a System of Linear Conductors.
Mannheim: Liaison géométrique entre les sphères osculatrices de deux courbes qui ont les mêmes normales principales.
Muir: New Relations between Bipartite Functions and Determinants, with a Proof of Cayley's Theorem in Matrices.

Basset: On the Pressure of an Electrified Spherical Bowl, and on the Velocity Potential due to the Motion of an Infinite Liquid about such a Bowl.
Rogers: Note on the Forms of an Inscribed and Circumscribing Polygon.
Bryant: On the Ideal Geometrical Form of Natural Cell-Structure.

Vol. XVII. — Twenty-Second Session (1885-86):

Rayleigh: On Waves propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid.
Griffiths: On some Consequences of the Transformation Formula

$$y = \sin (L + A + B + C - \ldots).$$

Roberts: On Unicursal Curves.
Buchheim: On Clifford's Theory of Graphs.
Kempe: On the Application of Clifford's Graphs to Ordinary Binary Quantics.
Walker: On a Theorem in Kinematics.
Hammond: On a Class of Integrable Reciprocants.
MacMahon: Perpetuant Reciprocants.
Glaisher: Note on the Functions $Z(u)$, $\Theta(u)$, $\Pi(u, a)$.
Roberts: On Polygons circumscribed about a Conic and inscribed in a Cubic.
Elliott: On Ternary and n-ary Reciprocants.
Leudesdorf: On some Results connected with the Theory of Reciprocants.
Rogers: Homographic and Circular Reciprocants.
Cayley: On the Complex of Lines which meet a Unicursal Quartic Curve.
Buchheim: On the Theory of Screws in Elliptic Space.
Basset: On the Motion of a Liquid Ellipsoid under the influence of its own Attraction.
Greenhill: Solution of the Cubic and Quartic Equations by means of Weierstrass's Elliptic Functions.
Hirst: On the Cremonian Congruences which are contained in a Linear Complex.
Ibbetson: On the Airy-Maxwell Solution of the Equations of Equilibrium of an Isotropic Elastic Solid under Conservative Forces.
Thomson: Electrical Oscillations on Cylindrical Conductors.
Leudesdorf: Formula for the Interchange of the Independent and Dependent Variables, with some Applications to Reciprocants.
Rogers: Second Paper on Reciprocants.
Greenhill: Some Applications of Weierstrass's Elliptic Functions.
Jeffery: On the Converse of Stereographic Projection and on Contangential and Coaxal Spherical Circles.
Genese: Reciprocation in Statics.

Vol. XVIII. — Twenty-Third Session (1886-87).

Glaisher: The Mathematical Tripos (Presidential Address).
Lachlan: On Certain Operators in connection with Symmetric Functions.
Russel: On the Transformations of the General Elliptic Element $\frac{\delta x}{\sqrt{U_x}}$, where
$U_x = x - \alpha . x - \beta . x - \gamma . x - \delta = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e.$

Burstall: Note on the Arc of a Sphero-Conic.

MacMahon: The Theory of a Multilinear Partial Differential Operator, with Applications to the Theories of Invariants and Reciprocants.

Buchheim: On the Theory of Screws in Elliptic Space (Fourth Note).

Roberts: On the Rectification of Certain Curves.

Rogers: Third Memoir on Reciprocants.

Elliott: On the Linear Partial Differential Equations satisfied by Pure Ternary Reciprocants.

Griffiths: Note on Two Annihilators in the Theory of Elliptic Functions.

Hill: On the Incorrectness of the Rules for contracting the processes of finding the Square and Cube Roots of a Number.

Cockle: On the Equation of Riccati.

Roberts: On Polygons inscribed in a Quadric and circumscribed about two Confocal Quadrics.

Tanner: On the Binomial Equation $x^p - 1 = 0$. Quinquisection.

Leudesdorf: Second Paper on Change of the Independent Variable; with Applications to some Functions of the Reciprocant kind.

Greenhill: Note on the Weierstrass Elliptic Functions and their Applications.

Simmons: A New Method for the Investigation of Harmonic Polygons.

Genese: On Relations between Circles and Algebraic Curves, with Applications to Dynamics.

Cayley: On Briot and Bouquet's Theory of the Differential Equation $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$.

Sharp: On the Properties of Simplicissima (with especial regard to the related Spherical Loci).

Ocagne (d'): Sur une propriété de la sphère et son extension aux surfaces quelconques.

Larmor: General Theory of Dupin's Space-Extension of the Focal Properties of Conic Sections.

Basset: On the Motion of Two Spheres in a Liquid, and allied Problems.

Griffiths: Second Note on Elliptic Transformation Annihilators.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.

BAND XVII—JAHRGANG 1887:

Kohlrausch: Bestimmung der Selbstinduction eines Leiters mittels inducirter Ströme.

— Ueber die Herstellung sehr grosser genau bekannter elektrischer Widerstandsverhältnisse und über eine Anordnung von Rheostatenwiderständen.

— Ueber die Berechnung der Fernwirkung eines Magnets.

Finsterwalder: Katoptrische Eigenschaften der Flächen 2. Grades.

Lommel: Die Photometrie der diffusen Zurückwerfung.

Meyer (O. E.): Ueber die Bestimmung der inneren Reibung nach Coulomb's Verfahren.

Königsberger: Ueber die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen.

Gordan: Ueber die Bildung der Discriminante einer ternären Form.

Acta Mathematica

(Rédacteur en chef: G. Mittag-Leffler, à Stockholm).

Tomes I-X (1882-87).

Appell: Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) (I, 109-131, 132-144).
— Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle (I, 145-152).
— Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes (II, 71-80).
— Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle
— $\Delta F = 0$ (IV, 313-374).
— Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la Physique mathématique (VIII, 265-294).

Beltrami: Sur les couches de niveau électromagnétiques (III, 141-152).

Bendixson: Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points (II, 415-429).
— Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss (IX, 1-34).

Berger: Déduction de quelques formules analytiques d'un théorème élémentaire de la théorie des nombres (IX, 301-320).

Bertrand: Sur les unités électriques (VIII, 387-392):

Bjerknes: Recherches hydrodynamiques. — Premier mémoire: Les équations hydrodynamiques et les relations supplémentaires (IV, 121-170).

Bohlin: Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme (X, 109-130).

Bourguet: Note sur les intégrales eulériennes (I, 295-296).
— Sur quelques intégrales définies (I, 363-367).
— Sur les intégrales eulériennes et quelques autres fonctions uniformes (II, 261-295).
— Sur la fonction eulérienne (II, 296-298).

Cantor (*G*): Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels (II, 305-310).
— Une contribution à la théorie des ensembles (II, 311-328).
— Sur les séries trigonométriques (II, 329-335).
— Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques (II, 336-348).
— Sur les ensembles infinis et linéaires de points (II, 349-380).
— Fondements d'une théorie générale des ensembles (II, 381-408).
— Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à N dimensions — Première communication (II, 409-414).
— De la puissance des ensembles parfaits de points (IV, 381-392).
— Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n — Zweite Mittheilung (VII, 105-124)

Casorati: Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes (VIII, 345-359).
— Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales Abéliennes et en particulier des fonctions inverses des intégrales elliptiques (VIII, 360-386).
Crone: Sur une espèce de courbes symétriques de la sixième classe (II, 81-96).
Darboux: Sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre des systèmes orthogonaux (IV, 93-96).
Dobriner: Die Flächen constanter Krümmung mit einem System spärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hilfe von Thetafunctionen zweier Variabeln (IX, 73-104).
— Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien (X, 145-152).
Du Bois-Reymond (*P*): Ueber den Begriff der Länge einer Curve. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Ludwig Scheeffer über Rectification der Cuven (VI, 167-168).
Elliot: Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques (II, 233-260).
Falk: Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Functionen (VII, 197-200).
Fiedler: Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen (V, 331-408).
Fuchs: Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen (I, 321-362).
— Sur un développement en fraction continue (IV, 91-92).
Goursat: Sur un théorème de M. Hermite (I, 189-192).
— Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies (II, 1-70).
— Démonstration du théorème de Cauchy (IV, 197-200).
— Sur une classe d'intégrales doubles (V, 97-120).
Gyldén: Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper (I, 77-92).
— Die intermediäre Bahn des Mondes (VII, 125-172).
— Untersuchungen über die Convergenz der Reihen welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden (IX, 185-294).
Hacks: Einige Sätze über Summen von Divisoren (IX, 177-181).
— Ueber Summen von grössten Ganzen (X, 1-52).
Halphen: Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre (III, 325-380).
Hermite: Sur une relation donnée par M. Cayley, dans la théorie des fonctions elliptiques (I, 368-370).
— Sur quelques points dans la Théorie des nombres (II, 299-300).
— Sur un développement en fraction continue (IV, 89-90).
— Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques (IV, 193).
— Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques (V, 297-330).
Hill: On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon (VIII, 1-36).
Holst: Beweis des Satzes dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat (VIII, 155-160).

Humbert: Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques (X, 281-298).

Kobb: Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution (X, 89-108)

Kœnigs: Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments (X, 313-338).

Königsberger: Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten (III, 1-48).

Kowalevski: Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse A b e l'scher Integrale 3ten Ranges auf elliptische Integrale (IV, 393-414).

— Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln (VI, 249-304).

Krause: Sur la transformation des fonctions elliptiques (III, 93-96).

— Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques du premier ordre (III, 153-180).

— Sur le multiplicateur des fonctions hyperelliptiques du premier ordre (III, 283-288).

Krazer: Ueber die Verallgemeinerung der R i e m a n n'schen Thetaformel (III, 240-276).

Krey: Einige Anzahlen für Kegelflächen (V, 83-96).

— Ueber Systeme von Plancurven (VII, 49-94).

Laguerre: Sur quelques points de la théorie des équations numériques (IV, 97-120).

Lecornu: Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers (X, 201-280).

Le Paige: Sur les surfaces du troisième ordre (III, 181-200).

— Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre (V, 195-202).

Lerch: Un théorème de la théorie des séries (X, 87-88).

Lindelöf: Une question de rentes viagères (III, 97-101).

Lindstedt: Ueber ein Theorem des Herrn T i s s e r a n d aus der Störungstheorie. (IX, 381-384).

Lipschitz: Sur quelques points dans la théorie des nombres (II, 301-304).

— Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques (IV, 194-196).

— Déduction arithmétique d'une relation due à J a c o b i (VII, 95-100).

— Zur Theorie der krummen Oberflächen (X, 131-136).

— Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen (X, 137-144).

Loria: Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques (IX, 71-72).

Malmsten: Zur Theorie der Leibrenten (I, 63-76).

— Sur la formule $hu_x' = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u_x' + \frac{B_1 h^2}{1.2.}\Delta u_x'' - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4.}\Delta u_x^{IV} + \text{etc.}$ (V, 1-46).

Markoff: Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. T c h e b y c h e f f (IX, 57-70).

Matthiessen: Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegeneinander und gegen einen Hauptstrahl (IV, 177-192).

Mellin: Ueber die transcendente Function $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$ (II, 231-232).

— Eine Verallgemeinerung der Gleichung $\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$ (III, 102-104).

— Ueber gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte (III, 322-324).

— Zur Theorie der Gammafunction (VIII, 37-80).

— Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential-und Differenzengleichungen (IX, 137-166).

Minkowski: Untersuchungen über quadratische Formen. — I. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält (VII, 201-258).

Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante (IV, 1-79).

— Démonstration nouvelle du théorème de Laurent (IV, 80-88).

Molk: Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination (VI, 1-166).

Netto: Zur Theorie der Discriminanten (I, 371-399).

— Zur Theorie der Elimination (VII, 101-104)

— Ueber orthogonale Substitutionen (IX, 295-300).

Noether: Ueber die reductiblen algebraischen Curven (VIII, 161-192).

Phragmén: Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre (V, 47-48).

— Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques (VII, 33-42).

— Ueber die Begrenzungen von Continua (VII, 43-48).

Picard: Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions (I, 297-320).

— Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires (II, 114-135).

— Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennnes correspondantes (V, 121-182)

Pincherle: Note sur une intégrale définie (VII, 381-386).

— Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies (X, 153-182).

Poincaré: Théorie des groupes fuchsiens (I, 1-62).

— Mémoire sur les fonctions fuchsiennes (I, 193-294).

— Sur les fonctions de deux variables (II, 97-113).

— Mémoire sur les groupes kleinéens (III, 49-92).

— Sur les groupes des équations linéaires (IV, 201-311).

— Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes (V, 209-278).

— Sur un théorème de M. Fuchs (VII, 1-32).

— Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (VII, 259-380).

— Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (VIII, 295-344).

— Sur les résidus des intégrales doubles (IX, 321-380).

— Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires — Réponse à M. Thomé (X, 310-312).

Prym: Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel (III, 201-215).

— Ableitung einer allgemeinen Thetaformel (III, 216-239).

— Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel (III, 240-276) —

Reye: Das Problem der Configurationen (I, 93-96).

— Die Hexaëder-und die Octaëder- Configurationen (12_6, 16_3) (I, 97-108).

Runge: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen (VI, 229-244).

— Zur Theorie der analytischen Functionen (VI, 245-248).

— Entwicklung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten (VI, 305-318).

— Ueber die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5+ux+v=0$ (VII, 173-186).

— Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen (VII, 387-392).

Scheeffer: Beweis des Laurent'schen Satzes (IV, 375-380).

— Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven (V, 49-82).

— Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen (V, 183-194 und 279-296).

Schering: Zur Theorie der quadratischen Reste (I, 153-170).

Schläfli: Ueber $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ und verwandte Integrale (VII, 187-196).

Schroeter: Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen (V, 205-208).

Schubert: Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension (VIII, 97-118).

Schwering: Ueber gewisse trinomische komplexe Zahlen (X, 57-86).

Sonine: Sur la généralisation d'une formule d'Abel (IV, 171-176).

Sparre (de): Sur l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+\left[2a\,\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}+2a_1\,\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}-2a_2\,\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx}$

$$=\left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3-a_2)(n_3+a_2+1)+\frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2-a_1)(n_2+a_1+1)\right.$$
$$\left.+\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}(n_1-a)(n_1+a+1)+k^2 \operatorname{sn}^2 x\,(n+a+a_1+a_2)(n-a-a_1-a_2+1)+h\right]y,$$

équation ou a, a_1, a_2 désignent des nombres quelconques, n, n_1, n_2, n_3 des nombres entiers positifs ou négatifs, et h une constante arbitraire (III, 105-140 et 289-321).

Staude: Ueber hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung (VIII, 81-92).

— Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten (X, 183-200).

Steen: Note sur certaines équations différentielles linéaires (III, 277-282).

Stenberg: Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen (VIII, 119-154).

— Sur un cas spécial de l'équation différentielle de Lamé (X, 339-348).

Stern: Eine Bemerkung über Divisorensummen (VI, 327-328).

— Sur un théorème de M. Hermite relatif à la fonction $E(x)$ (VIII, 93-96).

— Sur la valeur de quelques séries qui dépendent de la fonction $E(x)$ (X, 53-56).

Stieltjes: Un théorème d'algèbre (VI, 319-320).

— Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé (VI, 321-326).

— Note sur un développement de l'intégrale $\int_0^a e^{x^2}dx$ (IX, 167-176).

— Sur les racines de l'équation $X_n = 0$ (IX, 385-400).

— Table des valeurs des sommes $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$ (X, 299-302).

Tchebychef: Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux — Traduit du russe par Mme Sophie Kowalevski (IX, 35-56).

— Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs (IX, 182-184).

Valentiner: Zur Theorie der Raumcurven (II, 136-230).

Weber: Zur Theorie der elliptischen Functionen (VI, 329-416).

— Theorie der Abel'schen Zahlkörper: I. Abel'sche Körper und Kreiskörper. — II. Ueber die Anzahl der Idealclassen und die Einheiten in den Kreiskörpern deren Ordnung eine Potenz von 2 ist. — III. Der Kronecker'sche Satz. — IV. Ueber die Bildung Abel'scher Körper mit gegebener Gruppe (VIII, 193-263 und IX, 105-130).

Weierstrass: Sur la théorie des fonctions elliptiques — Traduit de l'allemand par A. Pautonnier (VI, 169-228).

Weingarten: Zur Theorie des Flächenpotentials (X, 303-309).

Zeller: Zu Euler's Recursionsformel für die Divisorensummen (IV, 415-416).

— Kalender-Formeln (IX, 131-136).

Zeuthen: Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative (I, 171-188).

— Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique (V, 203-204).

TOME XI.

NUMÉRO 1 (30 décembre 1887):

Picard: Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique (1-12).

Strauss: Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung (13-18).

Lerch: Note sur la fonction $K(w, x, s)$ (19-24).

Bruns: Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems (25-96).

NUMÉRO 2 (20 mars 1888):

Heun: Zur Theorie der mehrwerthigen, mehrfach lineär verknüpften Functionen (97-118).

Schwering: Eine Eigenschaft der Primzahl 107 (119-120).

Thomson: On the Division of Space with Minimum Partitional Area (121-134).

Goursat: Sur un mode de transformation des surfaces minima (135-186).

Hurwitz: Ueber die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche (187-200).

NUMÉRO 3 (1 juin 1888):

Sylow: Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier (201-256).

Goursat · Sur un mode de transformation des surfaces minima (second mémoire) (257 264).

Schwering : Untersuchungen über die Normen komplexer Zahlen (265-296).

Söderberg : Démonstration du théorème fondamental de Galois dans la théorie de la résolution algébrique des équations (297-302).

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik
begründet von Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Max Henoch und Emil Lampe.

BAND XVII.—JAHRGANG 1885 : HEFT 1, 2 (Berlin, G. Reimer, 1887, 1888).

Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

JAHRGANG 1887 :

Fuchs : Ueber die Umkehrung von Functionen zweier Veränderlichen (47-56).

— Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen, und über eine Anwendung desselben auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung (75-82).

— Ueber Relationen zwischen den Integralen von Differentialgleichungen (579-596).

Helmholtz : Zur geschichte des Princips der kleinsten Action (109-120).

Zeitschrift für Mathematik und Physik
herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor.

33. JAHRGANG.

I HEFT (28. December 1887) :

Schendel : Verschiedene Darstellungen der Resultante zweier binären Formen (1-13).

Kilbinger : Ueber eine Art involutorischer Verwandtschaft des zweiten Grades (14-21).

Haentzschel : Ueber die Differentialgleichung der Functionen des parabolischen Cylinders (22-30).

Heymann : Beiträge zur Transformation der hyperelliptischen Integrale (31-55).

Kleinere Mittheilungen.

Simon : Ueber einige Ungleichungen (56-61).

Heymann : Ueber die Differentialgleichung $\frac{dx}{x^2-1} = \frac{n\,dy}{y^2-1}$ (61-64).

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Hunrath: Zur Geschichte der annähernden Berechnung quadratischer Irrationalitäten (1-11).

RECENSIONEN (12-38) — BIBLIOGRAPHIE vom 1 Oct. bis 30. Nov. 1887 (38-40).

II. HEFT (18. april 1888):

Schendel: Verschiedene Darstellungen der Resultante zweier binären Formen (Schluss.) (65-77).
Stoll: Ueber einige Sätze J. Steiner's (78-100).
Bochow: Zusammenhang zwischen particulärun und allgemeinen Integralen gewisser Differentialgleichungen (101-110).

Kleinere Mittheilungen.

Hossfeld: Ueber eine Aufgabe aus der projectiven Geometrie des Raumes — Construction der Raumcurven dritter Ordnung aus imaginären Punkten (111-116).
Buka: Bemerkungen zu der Grübler'schen Bestimmung der Krummungsmittelpunkte der Polbahnen eines ebenen Systems (117-118).
Cantor (*M.*): Ueber eine Proportion aus der elementaren Geometrie (119).
Beyel: Vier Aufgaben über drei-und vierpunktige Berührung von Kegelschnitten (120-125).
Weibrauch: Ueber gewisse Determinanten (126-128).

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Gelcich: Entwurf einer Geschichte der Gesetze des Stosses (41-58).
RECENSIONEN (59-78)—BIBLIOGRAPHIE vom 1. Decem. 1887 bis 31. Jan. 1888 (78-80).

III. HEFT (8. Juli 1888):

Lohnstein: Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels (129-136).
Vivanti: Ueber Minimalflächen (137-153).
August: Ueber Rotationsflächen mit loxodromischer Verwandtschaft (154-166).
Matthiessen: Untersuchungen über die Constitution unendlich dünner astigmatischer Strahlenbündel nach ihrer Brechung in einer krummen Oberfläche (167-183).

Kleinere Mittheilungen.

Vivanti: Ein Satz aus der Eliminationstheorie (184-185).
Haentzschel: Ueber die Fourier-Bessel' sche Transcendente (185-186).
Hossfeld: Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, von denen acht imaginär sind (187).
Schmid: Ueber das Gesetz der Veränderlichkeit der Schwere für das Jacobi' sche Gleichgewichtsellipsoid (188-190).
Burmester: Berichigung zu Buka's « Bemerkungen etc. » (190).
Schlömilch: Eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten (190-191).
— Bemerkung über doppelt centrische Vielecke (191).
Sternberg: Geometrische Untersuchung über die Drehung der Polaritationsebene im magnetischen Felde (191-192).

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Gelcich: Entwurf einer Geschichte der Gesetze des Stosses (Schluss) (81-89).
Curtze: Gedächtnissrede auf Professor Dr. Leopold Prowe (89-96).
Wittstein: Historische Miscellen (96-97).
Recensionen (98-116) — Bibliographie vom 1. Febr. bis 31. Mai 1888 (117-120).

Comptes Rendus hebd. des séances de l'Académie des Sciences.

[*Vedi* pag. 23].

Tome CVI (Premier Semestre 1888).

N° 14 (3 avril):

Bertrand: Sur l'erreur à craindre dans l'évaluation des trois angles d'un triangle.
Cayley: Note sur les surfaces minima et le théorème de Joachimsthal.
Jung: A propos de deux Communications récentes de M. Bertrand « Sur la probabilité du tir à la cible ».

N° 15 9(a vril):

Bertrand: Sur les lois de mortalité de Gompertz et de Makeham.
Boussinesq: Équilibre d'elasticité d'un solide sans pesanteur, homogène et isotrope, dont les parties profondes sont maintenues fixes, pendant que sa surface éprouve des pressions ou des déplacements connus, s'annulant hors d'une région restreinte où ils sont arbitraires.
Pellet: Sur la formule de Fourier et ses analogues.
Demartres: Sur les courbes de M. Bertrand, considérées comme lignes géodésiques de surfaces cerclées.
Bougaieff: Sur les fonctions discontinues logarithmiques.
Loir: Caractère de la divisibilité d'un nombre par un nombre premier quelconque.
Lucas (F.): Résolution des équations par l'électricité.

N° 16 (16 avril):

Bertrand: Sur la méthode des moindres carrés.
Boussinesq: (suite de la Note insérée dans le numéro précédent).
Perrin: Sur quelques familles d'opérateurs différentiels.
Fouret: Sur une source d'equations algébriques ayant toutes leurs racines réelles.
Paraf: Sur deux théorèmes de Jacobi relatifs aux lignes géodésiques.
Bonnet (Ossian): Observations relatives à la Communication précédente.
Cesàro: Sur deux recentes Communications de M. Jensen.

N° 17 (23 avril):

Bertrand: Sur la précision d'un système de mesures.
Fouret: Sur certains types d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles.

N° 18 (30 avril):

Bertrand: Sur les conséquences de l'égalité acceptée entre la valeur vraie d'un polynôme et sa valeur moyenne.

Halphen: Sur les intégrales pseudo-elliptiques.

Lévy (M): Sur la théorie de la figure de la Terre.

Sylvester: Preuve élémentaire du théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques dans les cas ou la raison est 8 ou 12.

Guyou: Note relative à l'expression de l'erreur probable d'un système d'observations.

N° 19 (7 mai):

Bertrand: Sur l'introduction des probabilités moyennes dans l'interprétation des résultats de la Statistique.

Lévy (M.): Sur la théorie de la figure de la Terre.

Halphen: Sur la convergence d'une fraction continue algébrique.

Resal: Mouvement dans un milieu, dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison de la distance.

Cesàro: Sur une fonction arithmétique.

Le Chatelier: Sur les fonctions caractéristiques de M. Massieu.

N° 20 (14 mai):

Lévy (M.): Sur la théorie de la figure de la Terre.

Sylvester: Preuve élémentaire du théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques dans tous les cas où la raison est 8 ou 12.

N° 21 (22 mai):

Quiquet: Sur la loi de Makeham.

Picard: Sur la limite de convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles.

Cosserat: Sur l'emploi du complexe linéaire de droites dans l'étude des systèmes linéaires de cercles.

N° 22 (28 mai):

Kœnigs: Sur les volumes engendrés par un contour fermé dans un mouvement quelconque.

Cosserat: Sur les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé.

Petot: Sur les surfaces qui ont pour lignes de courbure d'un système des hélices tracées sur des cylindres quelconques.

Jensen: Sur un théorème général de convergence. Réponse aux remarques de M. Cesàro.

N° 23 (4 juin):

Poincaré: Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation.

Gyldén: Quelques remarques relativement à la représentation de nombres irrationnels au moyen des fractions continues.

N° 24 (11 juin):

Liouville (R): Sur certaines équations différentielles du premier ordre.
Cesàro: Sur les fondements du calcul asymptotique.
Lecornu: Sur les mouvements giratoires des fluides.

N° 25 (18 juin):

(alcuna comunicazione di matematica)

N° 26 (25 juin):

Gyldén: Quelques remarques relatives à la représentation de nombres irrationnels au moyen des fractions continues.
Goursat: Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace.
Perrin: Sur la relation qui existe entre p fonctions entières de $p - 1$ variables.
Cesàro: Sur un théorème de Kummer.

Mémoires de la section mathématique de la Société des naturalistes de la Nouvelle Russie. Odessa. (*)

Tome I (1878):

Liguine: Aperçu de la manière de voir de M. Relau sur la Machine.
Jarochenko: Les operations algébriques dans le domaine des formes géométriques élémentaires.
Starkoff: Méthode générale de l'integration des équations différentielles linéaires.
Starkoff: Supplément à l'article précédent.

Tome II (1879):

Starkoff: Intégrale générale de l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^n z}{d\varphi\, d\xi \ldots d\psi\, d\omega} = \Psi(\varphi, \xi, \ldots, \psi, \omega)z + \Phi(\varphi, \xi, \ldots, \psi, \omega).$$

Starkoff: Sur l'intégration des équations différentielles simultanées.
Kononowitz: Détermination d'Albedo du carton blanc, indépendante de la méthode de Lambert.
Swedoff: Théorie mathématique des formes cométaires.
Augustinowitz: Recherches de la conductibilité des isolateurs liquides et fondus.

Tome III (1881):

Swedoff: Théorie mathématique des formes cométaires (*suite*).
Starkoff: Sur l'intérêt composé et des comptes courants.
Liguine: Activité scientifique de Michel Chasles.
Schapiro: Principes de la théorie des co-fonctions générales et de leurs applications.

(*) La versione dal russo è dovuta alla cortesia del socio prof. A. Starkoff, di Odessa.

TOME IV (1883) :

Starkoff : Sur les surfaces enveloppes des sphères mobiles de rayon variable.

Oumoff : Extraits de lections sur la Physique mathématique : 1° Théorie des oscillations infiniment petites du système conservateur autour de la position d'équilibre constant. 2° Les oscillations du système libre d'un degré unique.

'iguine : Applications immédiates de la chaleur solaire (Insolateurs).

iguine : Littérature des compas composés.

TOME V (1884) :

lossowsky : Installation des observations météorologiques au sud de la Russie.

Jossowsky : Observation de la temperature du terrain dans Elisabethgrade.

antzewsky : Sur le système articulé de trois tiges.

kowsky : Sur le choc de deux sphères, une desquelles flotte en liquide.

'arkoff : Sur le problème de la surface de la moindre résistance pendant le mouvement dans un fluide non compressible.

ikowsky : Sur la solution graphique de l'équation fondamentale du calcul d'orbite des planètes.

mine : Généralisation d'une formule d'A b e l.

owikoff : Indice de la constance du mouvement et leur liaison avec l'indice du maximum ou du minimum d'une intégrale définie simple.

'rloff : De la théorie des roulettes.

TOME VI (1885) :

'onine : Sur un problème du calcul des variations.

'tarkoff : Sur une équation différentielle linéaire du 3ème degré.

'tarkoff : Sur un problème du calcul des variations.

'tarkoff : Sur quelques particularités de la solution du problème de N e w t o n sur la surface de la moindre résistance.

Oumoff : Signification géométrique des intégrales de F r e s n e l.

'tarkoff : Intégration d'une fraction rationnelle dont le dénominateur possède des racines imaginaires.

'onine : Sur un problème du calcul des variations (2d article).

iguine : Une nouvelle construction de M. M a u r i c e d'O c a g n e pour la détermination de la relation des vitesses dans les mécanismes dirigeants de P e a u c e l l i e r et H a r t.

'abbé et *Starkoff* : Bibliographie russe de la mathématique, mécanique, astronomie physique et météorologie pour l'année 1884.

TOME VII (1886) :

lossowsky : Les orages en Russie.

'echinsky : Sur la décomposition des fonctions analytiques en fractions continues.

'ossowsky : Les orages au sud de la Russie (avec 4 cartes).

Seliger : Une page d'Analyse.

Habbé et *Starkoff* : Bibliographie russe de la mathématique, mécanique, astronomie physique et météorologie pour l'année 1885.

Starkoff : Sur l'histoire de la notation algébrique en correlation avec le développement de la notation musicale et d'écriture.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei

[*Vedi* pag. 20].

VOLUME IV (1888) — PRIMO SEMESTRE :

Bianchi : Sulla equazione a derivate parziali del Cayley nella teoria delle superficie (442-445).

— Sopra una classe di trasformazioni in sè medesima della equazione a derivate parziali

$$z^2\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}+z\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{1+p^2+q^2}=\text{cost.}$$ (445-452).

Brioschi : Osservazioni sulla Comunicazione del sig. Maschke (183-184).

— La forma normale delle equazioni del sesto grado (Nota I^a) (301-305).

— — — (Nota II) (485-488).

Cerruti : Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti (785-792).

Cesàro : Sui concetti di limite e di continuità (12-17).

— Formole relative al moto d'un punto (18-19).

— Sur la comparaison des séries divergentes (115-118).

— Sur les lois asymptotiques des nombres (452-457).

— Sur les systèmes de nombres entiers (457-462).

Favero : Intorno ad un recente studio sulla gravità (310-313).

Maschke : La risoluzione della equazione di sesto grado (Estratto di una lettera al socio Brioschi) (181-182).

Montesano : Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette (Nota I^a) (207-215).

— Sulle reciprocità birazionali nulle dello spazio (583-590).

Padova : Una nuova applicazione della teoria delle funzioni ellittiche alla meccanica (507-509).

Paladini : Sul movimento di rotazione che prende nel vuoto od in un fluido incompressibile un corpo soggetto a forze di potenziale $H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta$ (187-19[illegible]).

Pascal : Sopra un teorema fondamentale nella teoria del calcolo simbolico delle forme ennarie (119-124).

Pincherle : Sopra certi integrali definiti (100-104).

— Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (Nota I^a) (694-700).

— — — (Nota II^a) (792-799).

Pittarelli : Sulle forme appartenenti all'ottaedro (Estratto di lettera al socio Brioschi (509-513).

Pittarelli: Intorno alla trasformazione del differenziale ellittico effettuata per mezzo della rappresentazione tipica delle forme binarie di 3° e 4° grado (Estratto di lettera al socio Brioschi) (703-705).

Ricci: Sulla classificazione delle forme differenziali quadratiche (203-207).

Viola: Le lamini sottili anisotrope colorate nella luce polarizzata parallela (19-27).

Volterra: Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse (Nota II^a) (107-115).

— — (Nota III^a) (196-202).

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

který se [zvláštním zřetelem k studujícím rediguje prof. Augustin Pánek a vydává Jednota Českých Mathematiců (Praze). [*Vedi* t. I, p. 393].

Ročník XVII (1888).

A. P.: Život a působení P. Václava Šimerky (253-256).

Fürst: Kterak souvisí poučka Carnotova s poučkou Ptolemaeovou (27-28).

Hromádko: Kterak Heron Alexandrinský plochu trojúhelníka z daných jeho stran vypočítal (278-280).

Hron: Čtyrstěn, osmistěn a klenec (30).

Jeřábek (*A*): Geometrická úloha (176-178).

Jeřábek (*V*): O dvou místech geometrických (170-175).

Kašpr: Jak lze najíti třetí mocninu a odmocninu čísel dekadických (28-30).

Kostlivec: Jak lze řešiti některé číselné rovnice pouhým odmocnováním (159-170).

Lerch: Příspěvky k elementarné theorii elliptických integrálů (49-55, 145-158).

Monin: O konturách průmětů ploch stupně druhého (229-231).

— Řešení úlohy 12. v. XI. ročníku tohoto časopisu (231-232).

Navrátil: Perspektivný průmět točnový sférické (20-21).

Panék: O jisté radě nekonečné (227-229).

Plch: Přirozený kyvadlový stroj a dva nápodobené kyvadélkové strojky (1-10, 68-75, 262-274).

— Braunův trigonometr a jeho upotřebení (125-130).

— Nástin školního výkladu Foucaultovy odchylky (274-277).

Seydler: O základních rovnicích theorie pružnosti (97-120).

Slavick: S jakou rychlostí pohybují se molekuly plynů? (130-131).

Strnad: O čtyrúhelníku dvojstředovém (10-19, 56-68).

— Čtyry věty arithmetické (204-207).

Studnička: Nové odvození třetí základní poučky determinantní (193-199).

— O přibližných hodnotách řetězce se stálým jmenovatelem (200-204).

— O proměnlivosti součtu zvláštní nekonečné řady s nestejným členů (256-262).

Theurer: O nejnovějších pracích v oboru zářivé energie (22-27, 120-124, 207-226).

Proceedings of the Canadian Institute (Toronto).

[*Vedi* t. I, p. 393]. — III S. — Vol. V: Fasc. 1 (Oct. 1887); Fasc. 2 (Apr. 1888). Annual Report 1886-87.

Bibliotheca Mathematica

Journal d'histoire des Mathématiques publié par G. Eneström, à Stockholm.
[*Vedi* t. I, p. 393].

NOUVELLE SÉRIE. — ANNÉE 1887 :

Allman: On the name of the so-called « theorem of the gnomon » (22).
Christensen: The first determination of the length of a curve (76-80).
Eneström: Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques (3-7).
— Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la somm tion des séries, publié à Stockholm en 1718 (23-24).
Favaro: Otto anni d'insegnamento di Storia delle matematiche nella R. Università Padova (49-54).
Günther: War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt? (8-14).
— Notiz zur Geschichte der Klimatologie (65-69).
Heiberg: Der byzantinische Mathematiker Leon (33-36).
Hunrath: Zum Verständniss des Wortes *Algorismus* (70).
Le Paige: Sur un théorème attribué à La Hire (109).
Riccardi: Nota relativa ad una edizione del *Nuncius sidereus* del Galilei (15-16).
Steinschneider: Die Söhne des Musa ben Schakir (44-48, 71-75).
— Geminus in arabischer, hebräischer und zweifacher lateinischer Uebersetzung. (97-99).
Tannery: L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet (17-21).
— Études sur Diophante, I-III (37-43, 81-88, 103-108).
Wohlwill: Die Prager Ausgabe des *Nuncius sidereus* (100-102).

Revue Scientifique

(Directeur: M. Charles Richet)

TROISIÈME SÉRIE — TOME XV (Premier Semestre 1888): Nos 18-26.
— TOME XVI (Deuxième Semestre 1888): Nos 1, 2, 3.

Proceedings of the Royal Society (London).

VOL. XLIV (1888).

N° 268 — N° 269:

Burbury: On the Induction of Electric Currents in conducting Shells of small Thickness (147-150).
Chree: On Æolotropic Elastic Solids (214-218).

Giornale di Scienze Naturali ed Economiche (Palermo).

VOLUME XVIII (ANNO 1887):

Paternò (F.-P.): Un teorema sulle h_1 dei piani di un certo fascio (342-360).

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

IV° ELENCO : gennajo-luglio 1888.

[*Vedi* gli Elenchi precedenti : t. I, p. 29-41, 94-118; t. II, p. 5-19].

Amodeo, F. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 5]. Sopra un particolare connesso (2, 2) con due punti singolari e due rette singolari. *Giorn. Batt.*, XXV, 1887.

Lezioni sulle omografie binarie, raccolte da G. Quaratino (litogr.). Napoli, 1887-88.

Bardelli, G. (Milano). [*Vedi* t. I, p. 95]. Alcuni teoremi di statica razionale. *Ann. di Matem.*, IV_2, 1871.

Alcune proprietà dei cofficienti di una sostituzione ortogonale. *Rend. Ist. Lomb.*, IX_2, 1876.

Sulla cinematica di un corpo solido. *Ibid.*, XI_2, 1878.

Sull'area descritta da una linea invariabile che si move in un piano con determinata legge. *Ibid.*, XII_2, 1879.

Proprietà stereometriche di un sistema di forze. *Ibid.*, XXI_2, 1888.

Bertini, E. (Pavia). [*Vedi* t. II, p. 5]. Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche. *Rend. Ist. Lomb.*, XXI_2, 1888.

Betti, E. (Pisa). Sopra le forme omogenee a due indeterminate. *Annali di scienze matematiche e fisiche*, febbrajo 1856.

Sopra le serie doppie ricorrenti. *Ibid.*, febbrajo 1857.

Sopra l'equazioni algebriche con più incognite. *Annali di Matematica pura ed applicata*, I, gennajo e febbrajo 1858.

Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche. *Ibid.*, I, luglio-agosto 1858.

Rivista bibliografica : Cayley, « A Memoir on the Symmetric Fonctions of the Roots of an Equation » (*Phil. Trans.*, vol. 147, p. 2). *Ibid.*, I, settembre-ottobre 1858.

Sopra i combinanti. *Ibid.*, I, novembre-dicembre 1858.

Traduzione dal tedesco della Dissertazione inaugurale : « Fondamenti di una teorica generale delle funzioni di una variabile complessa » di B. Riemann. *Ibid.*, II, settembre-ottobre 1859.

Rivista bibliografica : B. Riemann, « Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite » (*Abh. der K. G. der W. zu Göttingen*, Band VIII). *Ibid.*, III, luglio-agosto 1860.

Nota sopra la teorica generale delle superficie curve. *Ibid.*, III, novembre-dicembre 1860.

La teorica delle funzioni ellittiche. *Ibid.*, III e IV, 1860, 1861.

Sopra la teoria della capillarità. Pisa, Tip. Nistri, 1866.

Alcune determinazioni delle temperature variabili di un cilindro. Pisa, Tip. Nistri, 1868.

Sopra la determinazione delle temperature variabili di una lastra terminata. *Ann. di Mat. pura ed applicata*, I_2, 1868.

Sopra la elettrodinamica. *Nuovo Cimento*, XXVII, maggio-giugno 1868.

Sopra la distribuzione delle correnti elettriche in una lastra rettangolare. *Ibid.*, III_2, febbrajo-marzo 1870.

Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. *Annali di Matematica pura ed applicata*, IV_2, 1871.

Sopra l'equazioni d'equilibrio dei corpi solidi elastici. *Ibid.*, VI_2, 1874.

Teoria della elasticità. *Nuovo Cimento*, VII_2, $VIII_2$, IX_2, X_2, 1874.

Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra loro. *Annali di Matematica pura ed applicata*, $VIII_2$, 1877.

Sopra una estensione dei principî generali della Dinamica. *Transunti della R. Acc. dei Lincei*. II, 1877.

Teorica delle forze Newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo. Un volume in-8° di pag. VIII-359. Pisa, Tip. Nistri, 1879.

Sopra la propagazione del calore. *Collectanea Mathematica in memoriam Chelini*, Milano, 1880.

Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea. *Ann. di Matematica*, X_2, 1881.

Sopra il moto dei fluidi elastici. *Nuovo Cimento*, XIV_3, 1883.

Sopra una estensione della terza legge di Keplero. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Bianchi, L. (Pisa). [*Vedi* t, I, p. 31, 97]. Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante. *Mem. Acc. Lincei*, IV_4, 1887.

Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi. *Ann. di Matem.*, XV_2, 1887.

Brambilla, A. (Bergamo). [*Vedi* t. II, p. 7]. Le omografie che mutano in sè stessa una curva gobba razionale del quarto ordine. *Rend. Ist. Lomb.*, XX_2, 1888.

Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto sul piano. (Due Note). *Rend. Ist. Lomb.*, XXI_2, 1888.

Brill, A. (Tübingen). Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. *Sitzung der math.-phys. Classe der k. b. Akad. der Wissensch. zu München*, 1888.

Ueber algebraische Correspondenzen. *Math. Annalen*, XXXI, 1888.

Cantone, M. (Palermo). Nuovo metodo per la determinazione delle due costanti di elasticità. *Rend. Acc. Lincei*, 1888.

Capelli, A. (Napoli). [*Vedi*, t. II, p. 7]. Determinazione delle operazioni invariantive fra due serie di variabili permutabili con ogni altra operazione della stessa specie. *Rend. Acc. Napoli*, 1887.

Casorati, F. (Pavia). [*Vedi*, t. II, p. 7]. Sopra le *coupures* del sig. Hermite, i *Querschnitte* e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa. *Ann. di Matem.*, $XV\text{-}XVI_2$, 1887,-1888.

Castelnuovo, G. (Venezia). Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio ad n dimensioni. *Atti Ist. Veneto*, IV_6, 1886.

Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe dello spazio a 4 dimensioni sulle sue projezioni nello spazio ordinario. *Ibid.*, V_6, 1887.

Studio sulla omografia di 2ª specie. *Ibid.* V_6, 1887.

Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni. *Ibid.*, VI_6, 1888.

Catalan, E. (Liège). [*Vedi* t. II, p. 7]. Extrait d'une lettre à M. G. de Longchamps. *Journ. de Math. spéciales.*

Sur les fonctions X_n de Legendre. *Mém. Acad. Belgique*, in-8°, XXXI, 1887.

Nouvelles propriétés des fonctions X_n. *Mém. couronnés et Mém. sav. étrangers publiés par l'Acad. de Belgique*, XLVII, 1888.

Nouvelles propriétés des fonctions X_n. (Supplément). *Ibid.* XLVII, 1888.

Cerruti, V. (Roma). [*Vedi* t. II, p. 7]. Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti. *Rend. Acc. Lincei*, 1888.

Chizzoni, F. (Catania). [*Vedi* t. I, p. 34, 101]. Sulla corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario ed i punti di uno spazio lineare a 4 dimensioni. *Atti Acc. Gioenia Catania*, XX_3, 1888.

Conti, I. (Palermo). [*Vedi* t. II, p. 8]. Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia. (Nota 2ª). *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

D'Arone, G. (Palermo). Intorno ad un teorema di Tchébycheff; *Giorn. di Batt.*, XXVI, 1888.

Del Pezzo, P. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 8]. Estensione di un teorema di Noether. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Del Re, A. (Napoli). [*Vedi* t. II, p. 9]. Sur une question élémentaire de Géométrie. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Sui sistemi lineari n-pli di sfere di un n-spazio. *Ibid.*, II, 1888.

Un teorema di geometria proiettiva sintetica ed alcuni suoi corollari. *Ibid.*, II, 1888.

Dyck, W. (München). Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen entspricht. *Math. Annalen*, XVIII, 1881.

Gruppentheoretische Studien, II — Ueber die Zusammensetzung einer Gruppe discreter Operationen, über ihre Primitivität und Transitivität. *Ibid.*, XXII, 1883.

Beiträge zur Analisus situs. I. Mittheilung. *Sächs. Bericht.*, 1885.

— II. » *Ibid.*, 1886.

— III. » *Ibid.*, 1887.

Mathematische Modelle (Prospectus). München, 1886.

Eneström, G. (Stockholm). [*Vedi* t. II, p. 9]. Table des matières des tomes 1-10 des *Acta Mathematica*, 1887.

Favaro, A. (Padova). Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspici di S. M. Re d'Italia. Esposizione e disegno. Firenze, Barbera, 1888.

Fiorini, M. (Bologna). Le projezioni quantitative ed equivalenti della Cartografia. *Boll. Società Geografica Italiana*, 1887.

Forsyth, A. R. (Cambridge). [*Vedi* t. II, p. 9]. Invariants, Covariants, and Quotient Derivatives associated with Linear Differential Equations. *Proceed. Royal Society*, XLIII, 1888.

The Differential Equations satisfied by Concomitants of Quantics. *Proceed. London Math. Society*, XIX, 1888.

On the Theory of Forms in the Integration of Linear Differential Equations of the second Order. *Quarterly Journal*, N° 89, 1888.

Homographic Invariants and Quotient Derivatives. *Messenger of Mathematics*, New Series, N° 202, February 1888.

Giudice, F. (Palermo). [*Vedi* t. II, p. 10]. Sopra la determinazione di funzioni d'una variabile definite per mezzo d'un'equazione con due variabili. Un'osservazione relativa alla costante che compare negli sviluppi in serie delle funzioni circolari. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Grimaldi, G.-P. (Palermo). Sulla dilatazione dell'etere solforico a diverse pressioni. *Transunti Acc. Lincei*, 1884.

Sulla variazione della temperatura del massimo di densità dell'acqua con la pressione. *Gazz. Chim. Ital.*, XV, 1885.

Sulla verificazione della equazione di van der Waals pel tiofene. *Ibid.*, XVI, 1885.

Sulla dilatazione termica dei liquidi a diverse pressioni. *Atti Acc. Gioenia*, $XVIII_3$, 1885.

Sulla deviazione minima o massima dei raggi in un prisma. Catania, 1885.

Sulla dilatazione termica dei liquidi a diverse pressioni e sulla verifica sperimentale di alcune equazioni teoretiche relative alla stessa (Note 3). *Rend. Acc. Lincei*, 1886.

Sulla teoria dei liquidi. *Gazz. Chim. Ital.*, XVII, 1887.

Sopra alcune equazioni della teoria dei liquidi. Modica, 1887.

Sulle azioni termomagnetiche. *Nuovo Cimento*, $XXII_3$, 1888.

Influenza del magnetismo sulle proprietà termoelettriche del bismuto. Palermo. 1887.

Sulla resistenza elettrica delle amalgame di sodio e di potassio. *Mem. Acc. Lincei*, IV, 1887.

Influenza del magnetismo sul comportamento termoelettrico del bismuto. *Rend. Acc. Lincei*, 1887.

Sopra una relazione fra il potere termoelettrico delle coppie bismuto-rame e la loro sensibilità rispetto all'azione del magnetismo. *Ibid.*, 1888.

Sulle modificazioni prodotte dal magnetismo nel bismuto *Ibid.*, 1888.

Guccia, G.-B. (Palermo). [*Vedi* t. II, p. 10]. Un teorema sulle curve singolari delle superficie algebriche. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Halphen, G.-H. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 11]. Sur l'équation d'Euler (Extrait d'une lettre adressée à M. G.-B. Guccia). *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Henry, C. (Paris). Lettre à M. le prince B. Boncompagni sur divers points d'histoire des mathématiques. *Bull. Boncomp.*, XX, 1887.

Hölder, O. (Göttingen). [*Vedi* t. I, p. 105]. Ueber eine Function, welche keiner algebraischen Functionalgleichung genücht. *Gott. Nachricht.*, N° 21, 1887.

Hossfeld, C. (Eisenach). [*Vedi* t. II, p. 11]. Ueber eine Aufgabe aus der projectiven Geometrie des Raumes. *Zeitschr. f. Mathem. u. Physik*, XXXIII, 1888.

Construction der Raumcurven dritter Ordnung aus imaginären Punkten. *Ibid.*, XXXIII, 1888.

Humbert, G. (Paris). [*Vedi* t. II, p. 11]. Sur les arcs des courbes planes algébriques. *Journ. École Polytechn.*, LVII, 1887.

Sur les courbes cycliques de direction. *Journ. de Math.*, IV_4, 1888.

Sur quelques propriétés des surfaces coniques. *Comptes Rendus*, CV, 1887.

Sur les lignes de courbure des cyclides. *Ibid.*, CVI, 1888.

Jonquières, E. de (Paris). [*Vedi* t. II, p. 11]. Construction géométrique de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la génération des sufaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs. *Comptes Rendus*, CVI, 20 février 1888.

Construction géométrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré déterminée par diverses conditions données. *Ibid.*, CVI, 26 mars 1888.

Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle du 5ème ordre douée de six points doubles. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Jordan, C. (Paris). [*Vedi* t. I, p. 37]. Sur la marche du cavalier. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Kiepert, L. (Hannover). Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade. *Math. Annalen*, XXXII, 1888.

Lazzeri, G. (Livorno). Sulla rappresentazione piana delle superficie sviluppabili razionali. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, VI, 1883.

La rappresentazione dello spazio rigato sopra un piano connesso e sua applicazione allo studio dei connessi lineo-lineari. *Atti Ist. Veneto*, III_6, 1885.

Nuovi teoremi sull'esagrammo di Pascal. *Ibid.*, III_6, 1885.

Sulle reciprocità birazionali nel piano e nello spazio (due note). *Rend. Acc. Lincei*, 1886.

Sopra i sistemi lineari di connessi quaternari (1,1). *Mem. Acc. Lincei*, IV, 1887.

Le curve e le sviluppabili multiple di una classe di superficie algebriche. *Atti Ist. Veneto*, VI_6, 1887.

Sopra certi sistemi di linee e di superficie. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Le Paige, C. (Liège). [*Vedi* t. II, p. 13]. Sur les homographies dans le plan. *Bull. Acad. de Belgique*, XII_3, 1886.

Un géomètre belge du XVIIe siècle: René-François de Sluse. *Ciel et Terre*, II_2, 1887.

Recherches sur le pentaèdre. *Bull. Acad. Belgique*, $XIII_3$, 1887.

Lettre à M. G. de Longchamps. *Journ. de Math. spéc.*, 1887.

Sur un théorème attribué à La Hire. *Bibliotheca Mathematica*, n. s., 1887.

Sur une traduction néerlandaise de la méthode de perspective de Girard Desargues et sur les «Lecons de ténèbres. *Ibid.*, n. s., 1888.

Démonstration d'un théorème de von Staudt. *Mem. Soc. Sc. Liège*, XV_2, 1888.

Le Paige et Deruyts. Sur les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective. *Bull. Acad. Belgique*, XV_3, 1888.

Longchamps, G. de (Paris). [*Vedi* t. II, p. 14]. Rapprochement entre la *Trisectrice* de Mac-Laurin et la *Cardioïde. Zvláštní otisk z Věstníka královské české společnosti nauk*, 1887.

Sur une Trisectrice remarquable. *Mathesis*, VIII, 1888.

Loria, G. (Genova). [*Vedi* t. II, p. 14]. Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica. *Giorn. Soc. lett. e conversaz. scientif. in Genova*, X, 1883.

Maggi, G.-A. (Messina). Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo. *Ann. Matem.*, XVI_2, 1888.

Mannheim, A. (Paris) [*Vedi* t. II, p. 14]. Sur certains conoïdes et en particulier sur le conoïde de Plücker. *Comptes Rendus*, CVI, 19 mars 1888.

Masoni, U. (Napoli). [*Vedi* t. I, p. 41, 110]. Sullo stato attuale della teoria dell'efflusso per luci a stramazzo. *Politecnico*, 1888.

Su di una nuova formola proposta pel calcolo della portata nelle bocche a stramazzo. *Rend. Acc. Napoli*, 1888.

Mayer, A. (Leipzig). Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung. *Bericht. Sächs. Gesellschaft*, 1885.

Uuber ein Bewegungsproblem. *Ibid.*, 1887.

Montesano, D. (Roma). Su alcuni sistemi di cubiche gobbe. Napoli, 1886.

Su i complessi di rette di secondo grado generati da due fasci proiettivi di complessi lineari. Napoli, 1886.

Su le correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa. *Mem. Acc. Lincei*, III, 1886.

Su alcuni complessi di rette-Battaglini. *Rend. Acc. Napoli*, 1886.

Sulle reciprocità birazionali nulle dello spazio. *Rend. Acc. Lincei*, 1888.

Su la curva gobba di 5° ordine e di genere 1. *Rend. Acc. Napoli*, 1888.

Su una famiglia di superficie omaloidiche. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Morera, G. (Genova). Sul problema della corda vibrante. *Atti Acc. Torino*, XXIII, 1888.

Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine. *Giorn. Soc. lett. e conversaz. scientif. in Genova*, X, 1888.

Murer, V. (Spezia). Sulle serie razionali di superficie algebriche. *Giorn. Battaglini*, XXIV, 1886.

Sulle serie di superficie algebriche d'indice 1 e 2. *Ibid.*, XXV, 1887.

Sulla ricerca delle radici commensurabili d'un'equazione algebrica. *Periodico di Matematica per l'insegn. second.*, II, 1887.

Sulla superficie di 5° ordine dotata di quartica doppia di 1ª specie. *Atti Ist. Veneto*, V_6, 1887.

Generazione della superficie d'ordine n con retta $(n-2)$-pla. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Neuberg, J. (Liège). Mémoire sur le tétraèdre. *Mém. couronnés Acad. Belgique*, XXXVII, 1884.

Sur les tétraèdres de Möbius. *Mém. Société Royale des sc. de Liège*, XI_2, 1884.

Sur les tangentes communes à un cercle et à une conique. *Journ. Math. spéc.*, 1885.

Sur les surfaces anallagmatiques. *Ass. Franç.; Congrès de Grenoble*, 1885.

Sur le quadrilatère harmonique. *Mathesis*, V, 1885.

Sur le point de Tarry. *Ibid.*, VI, 1886.

Sur le point de Steiner. *Journ. Math. spéciales*, 1886.

Sur quelques systèmes de tiges articulées. Tracé mécanique des lignes (Conférences à l'Association des élèves des écoles spéciales). Liège, Bertrand, 1886.

Neuberg et **Tarry**. Sur les polygones et les polièdres harmoniques. *Assoc. Franç.; Congrès de Nancy*, 1886.

Ocagne, M. d' (Rochefort s/m). [*Vedi* t. II, p. 15]. Sur les cordes communes à une conique et à un cercle de rayon nul. Application à la théorie géométrique des foyers dans les coniques. *Proceed. Edinb. Math. Society*, V, 1887.

Note sur un problème d'arithmétique. *Journal de Teixeira*, VIII, 1887.

Note sur les coniques. *Ibid.*, VIII, 1887.

Sur les péninvariants des formes binaires. *Annales de la Société scient. de Bruxelles*, XI, 1888.

Perroni, A. (Genova). Sul punto doppio apparente della cubica gobba. *Giorn. Soc. lett. e conversaz. scientif. in Genova*, X, 1888.

Pincherle, S. (Bologna). Sur une généralisation des fonctions eulériennes. *Comptes Rendus*, CVI, 23 janvier 1888.

Sulla risoluzione dell'equazione $\Sigma h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=f(x)$ a cofficienti costanti. *Rend. Acc. Bologna*, 1888.

Sopra certi integrali definiti. *Rend. Acc. Lincei*, 1888.

Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des equations différentielles linéaires. *Kronecker's Journal*, CIII, 1888.

Sulla risoluzione dell'equazione $\Sigma h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu)=f(x)$ a coefficienti costanti. *Mem. Acc. Bologna*, IX_4, 1888.

Piuma, C.-M. (Genova). Intorno a due classi di integrali esprimibili con soli logaritmi. *Giorn. Soc. lett. e conversaz. scientif. in Genova*, X, 1888.

Pizzetti, P. (Genova). Sur le calcul du résultat d'un système d'observations directes. *Mém. Société Royale des Sciences de Liège*, XV_2, 1888.

Gli azimut reciproci di un arco di geodetica. *Atti Acc. Torino*, XXIII, 1888.

Contribuzione allo studio geometrico della superficie terrestre. *Giorn. Soc. lett. e conversaz. scientif. in Genova.*, X, 1888.

Rodenberg, C. (Hannover). [*Vedi* t. I, p. 113]. Ueber die während der Bewegung projectiv-veränderlicher und starrer Systeme beschriebenen Curven und Flächen. *Gott. Nachrich.*, 1888.

Ruffini, F. P. (Bologna). [*Vedi* t. II, p. 16]. Di alcune proprietà della rappresentazione sferica del Gauss. *Mem. Acc. Bologna*, $VIII_4$, 1888.

Sadun, E. (Roma). [*Vedi* t. I, p. 114]. Sù alcuni teoremi relativi alla divisione algebrica. *Period. Matem. insegn. second.*, II, 1887.

Sulla risoluzione in numeri positi, interi o nulli, delle equazioni:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=r,$$

$$1\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+n\lambda_n=n.$$ *Ann. Matem.*, XV_2, 1887.

Schlaefli, L. (Bern). [*Vedi* t. I, p. 114]. Verbesserungen und zusätze zu den Bemerkungen über die Lamé schen Functionen. *Mem. Acc. Lincei*, IV, 1887.

Schoute, P.-H. (Groningen), [*Vedi* t. II, p. 17]. Sur un complexe du troisième ordre. *Assoç. Franç.; Congrès de Toulouse*, 1887.

Segre, C. (Torino). [*Vedi* t. II, p. 18]. Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario. *Mem. Acc. Torino*, $XXXIX_2$, 1888.

Sulle curve normali di genere p dei vari spazi (Estratto di lettera al prof. E. Bertini). *Rend. Ist. Lomb.*, XXI, , 1888.

Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Starkoff, A. (Odessa). [*Vedi* t. I, p. 115]. Sur un problème du calcul des variations. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Torelli, G. (Napoli). [*Vedi* t. I, p. 43, 116]. Alcune formole relative agl' integrali ellittici. *Ann. Ist. Tecnico e Nautico di Napoli*, 1887.

Su qualche proprietà delle curve piane del 3° ordine fornite d'un punto doppio. *Ib.*, 1888.

Vivanti, G. (Mantova). [*Vedi* t. II, p. 19]. Ein Satz aus der Eliminationstheorie. *Schlömilch's Zeitschr.*, XXXIII, 1888.

Ueber Minimalflächen. *Ibid.*, XXXIII, 1888.

Sulle equazioni a derivate parziali del 1° ordine. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Sulle funzioni ad infiniti valori. *Ibid.*, II, 1888.

Volterra, V. (Pisa). [*Vedi* t. II, p. 19]. Sopra le funzioni dipendenti da linee. *Rend. Acc. Lincei*, 1887.

Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse (tre note). *Ibid.*, 1887.

Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Voss, A. (München). Zur erinnerung an Axel Harnack. *M. Ann.*, XXXII, 1888.

Zeuthen, H.-G. (Kiöbenhavn). [*Vedi* t. II, p. 19]. Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés. *Math. Annalen*, XXXI, 1888.

Meissel, E. (Kiel). Ueber die Verbreitung vollkommen elastischer Gase von constanter Temperatur im Raume. *Jahr.-Bericht üb. d. Ober-Realschule in Kiel*, 1871-72.

Ueber den Ausfluss des Wassers aus Gefässen in zwei besond. Fällen. *Ib.*, 1872-73.

Bemerkungen über die Reduction der vollen elliptischen Integrale zweiter Gattung auf die vollen Integrale erster Gattung für denselben Modul. *Ibid.*, 1873-74.

Beiträge zur Theorie der Reihen. *Ibid.*, 1874-75.

Beiträge zur Ballistik des Infanterie-Gewehrs. *Ibid.*, 1877-78.

Notiz über das Integral einer Differential-Gleichung. *Ibid.*, 1877-78.

Ueber Reihen, denen man bei der numerischen Lösung des Problems der Drei Körper begegnet, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind. *Ibid.*, 1881-82.

Ueber die relative Menge gewisser Formprimzahlen innerhalb beträchtlicher Zahlenräume. *Ibid.*, 1883-84.

Ueber die Anzahl der Darstellungen einer gegebenen Zahl A durch die Form $A = \Sigma p_n x_n$, in welcher die p gegebene, unter sich verschiedene Primzahlen, x_n ganze positive Zahlen mit Ausschluss der Null sind. *Ibid.*, 1885-86.

Ueber Restsummen. *Ibid.*, 1887-88.

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

V° ELENCO: agosto-settembre 1888.

[*Vedi* gli Elenchi precedenti: t. I, p. 29-44, 94-118; t. II, p. 5-19, 49-56].

Amanzio, D. (Napoli). Di alcune trasformazioni del simbolo d'operazione

$$V\frac{d}{dx}.\ U\frac{d}{dx}\ \ldots\ Z\frac{d}{dx}.\ Y\frac{d}{dx}.\ X\frac{d}{dx}$$

e proprietà di alcuni determinanti che derivano da queste trasformazioni. *Giorn. Batt.*, XXI, 1883.

Amodeo, F. (Napoli). [*Vedi* p. 49]. On the Chords of a Parabola and Generally of a Conic. *Annals of Mathematics*, IV, 1888.

Correlazioni fra i teoremi delle operazioni sui numeri interi. *Periodico di Matematica*, III, 1888.

Angelitti, F. (Napoli). Sull'attrazione secondo la legge di una potenza intera qualunque della distanza. *Giorn. Batt.*, XX, 1882.

Bonolis, A. (Livorno). Di un nuovo e semplice modo di sviluppare i determinanti di grado qualunque, e sua applicazione alla ricerca della risultante di due equazioni qualsivogliano. *Giorn. Batt.*, XXI, 1883.

Brambilla, A. (Napoli). [*Vedi* p. 50]. Di una certa superficie algebrica razionale. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Capelli, A. (Napoli). [*Vedi* p. 50]. Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariativa fra le stesse serie. *Mem. Acc. Napoli*, I_2, 1888.

Una legge di reciprocità per le operazioni invariantive fra due serie di variabili n^{arie}. *Rend. Acc. Napoli*, giugno 1888.

Catalan, E. (Liège). [*Vedi* pag. 51]. Mélanges mathématiques — Tome III — Appendice. (Quelques Lettres). Bruxelles, F. Hayez, 1888.

Certo, L. (Palermo). Lo spazio delle omologie affini di un piano posto in relazione con lo spazio delle coniche dello stesso piano. *Giorn. Batt.*, XX, 1882.

Sui poligoni piani semplici. *Ibid.*, XXIII, 1885.

Sulle forme di terzo grado generate da due forme elementari proiettive di primo e di secondo grado di un piano o di una stella. *Annuario del R. Ist. Tecnico di Bari pel 1885*, marzo 1887.

Sull'n-agono inscritto isoclino in un n-agono piano semplice dato. *Ibid., pel 1886*, agosto 1887.

Del Re, A. (Napoli). [*Vedi* p. 51]. Relazione tra due determinanti. *Giorn. Batt.*, XIX, 1881.

Quistioni. *Ibid.*, XXV, 1887.

Omografie che mutano in se stessa una certa curva gobba del 4° ordine e 2ª specie, e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori. *Atti Acc. Torino*, XXII, 1887.

Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti. *Rend. Acc. Napoli*, agosto 1887.

Su certi sistemi di quartiche e sestiche sviluppabili che si presentano a proposito delle trasformazioni lineari di una certa quartica gobba in se stessa. *Ibid.*, gennajo 1888.

Le superficie polari congiunte rispetto ad un connesso di piani e di rette e ad una superficie algebrica fondamentale. *Ibid.*, luglio 1888.

Sur une question de géométrie liée à la théorie des normales à une quadrique. *Nouv. Ann. Mathém.*, VII_3, août 1888.

D'Ovidio, E. (Torino). [*Vedi* p. 15]. Sopra alcuni invarianti simultanei di due forme binarie degli ordini 5 e 4 e sul risultante di esse. *Mem. Acc. Lincei*, IV_4, 1888.

Fiedler, W. (Zürich). [*Vedi* p. 9]. Die birationalen Transformationen in der Geometrie der Lage. *Vierteljahr. d. Naturf. Gesellsch. in Zürich*, XXI.

Giuliani, G. (Napoli). Sopra la funzione P^n (cos γ) per n infinito. *Giorn. Batt.*, XXII, 1884.

Ianni, V. (Napoli). Sviluppo di una funzione simmetrica mediante le somme delle potenze simili. *Giorn. Batt.*, XXIII, 1885.

Intrigila, C. (Napoli). Sui poligoni iscritti e circoscritti contemporaneamente a due circonferenze. *Giorn. Batt.*, XXI, 1883.

Intrigila, C. e **Laudiero, F.** Dimostrazione di un teorema di F a u r e. *Giorn. Batt.* XIX, 1881.

Klein, F. (Göttingen). [*Vedi* t. I, p. 39]. Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique. (Extrait d'une Lettre adressée à M. C. J o r d a n). *Journ. de Math.* IV_4, 1888.

Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente. *Götting. Nachricht.*, 23. November 1887.

Ueber irrationale Covarianten. *Ibid.*, 30. Mai 1888.

Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen (Zweite Abhandlung). *Math. Annalen*, XXXII, 1888.

Lebon, E. (Paris). [*Vedi* p. 13]. Sur le calcul de quelques intégrales. *Journ. de Math. spéciales*, 1888.

Lemoine, E. (Paris). [*Vedi* t. I, p. 108]. Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des cotés d'un triangle. *Bull. Soc. Math. de France*, XIV, 1886.

Notes à propos du cercle des neuf points. *Journ. Math. élém.*, 1886.

Questions diverses sur la géométrie du triangle. *Assoc. Franç.*, *Nancy*, 1886.

Questions diverses sur la nouvelle géométrie du triangle. *Ibid.*, *Toulouse*, 1887.

Étude des points inverses. *Journ. de Math. spéciales*, 1887.

De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques. *Comptes Rendus*, CVII, 16 juillet 1888.

Lemoine et **Vigarié**. Note sur les éléments brocardiens. *Journ. de Math. élémentaires*, 1888.

Loria, G. (Genova). [*Vedi* p. 54]. Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque. *Giorn. Battaglini*, XXVI, 1888.

Notizie storiche sulla geometria numerativa. *Biblioth. Mathem.*, 1888.

Lucas, Ed. (Paris). Recherches sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diophante. *Bull. de la Société d'Émulation de l'Allier*, Moulins, 1873.

Sur la théorie des nombres premiers. *Atti Acc. Torino*, XI, 1876.

Principes de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique. *Nouvelle Correspondance Mathématique*, II, août-sept.-oct. 1876.

Sur le calcul symbolique des nombres de Bernoulli. *Ibid.*, II, nov. 1876.

Sur l'emploi, dans la Géométrie, d'un nouveau principe des signes. *Ibid.*, II et III; décembre 1876 et janvier 1877.

De l'application des systèmes de coordonnées tricirculaires et tétrasphériques, à l'étude des figures anallagmatiques. *Ibid.*, III, juillet et août 1877.

Considérations nouvelles sur la théorie des nombres premiers et sur la division géométrique de la circonférence en parties égales. *Assoc. Française, Havre*, 1877.

Sur les formules de Cauchy et de Lejeune-Dirichlet. *Ibid., Paris*, 1878.

Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie *Atti Acc. Lincei*, II_3, 1878.

Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *Nouvelle Correspondance Mathématique*, III et IV; 1877 et 1878.

Sur les fonctions cyclotomiques. *Comptes Rendus*, 12 avril 1880.

Sur l'Arithmétique figurative — Les permutations. *Assoc. Franç, Rouen*, 1883.

Le calcul et les machines à calculer (Conférence). *Ibid., Blois*, 1884.

Discours prononcé à la distribution solennelle des prix du Lycée Saint-Louis, le Mardi 4 août 1885. Paris, 1885.

Les carrés magiques de Fermat et de Frénicle. *Journ. Math. élém.*, 1887.

Marcolongo, R. (Roma). Su di un teorema di Algebra elementare. *Giorn. di Battaglini*, XXV, 1887.

Sull'analisi indeterminata di 2° grado. *Ibid.*, XXV, 1887.

Generalizzazione di un teorema sui determinanti. *Ibid.*, XXV, 1887.

Sull'analisi indeterminata di 2° grado (Nota II^a). *Ibid.*, XXVI, 1888.

Sulla rappresentazione conforme della Pseudosfera e sue applicazioni. *Rend. Acc. Napoli*, 5 maggio 1888.

Sull'equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile. *Ibid.*, 14 maggio 1888.

Marsano, G. B. (Genova). Una classe di identità algebriche. *Rivista di Matematica*, V_2, 1883.

Menabrea, L. F. (Paris). Luigi Federico Menabrea da Ciamberì ingegnere idraulico ed architetto civile, luogotenente nel genio militare, per essere aggregato al Collegio amplissimo di Filosofia e Belle Arti, classe di Matematica, nella R. Università di Torino, l'anno 1835, addì 10 dicembre alle ore 8 $1/2$ di mattina. Dissertazione di Laurea. Proposizioni di Geometria, Algebra, Calcolo infinitesimale, Meccanica, Fisica, Idraulica. Torino, Reale Tipografia, 1835.

Calcul de la densité de la Terre suivi d'un Mémoire sur un cas spécial du mouvement d'un pendule. *Mem. Acc. Torino*, II_2, 1840.

Nozioni sulla Meccanica analitica del signor Carlo Babbage. *Rivista Contemporanea*, fasc. XXI, 1842.

Relazione sopra una Memoria del sig. professore Felice Chiò intorno alla convergenza e le proprietà della formola di Lagrangia, letta nella seduta del 2 luglio 1843 della R. Accademia delle Scienze di Torino.

Observations sur la véritable interprétation de la série de Lagrange. *Mem. Acc. Torino*, X_2, 1847.

Études sur la théorie des vibrations. *Ibid.*, XV_2, 1854.

Lois générales de divers ordres de phénomènes dont l'analyse dépend d'équations linéaires aux différences partielles, tels que ceux des vibrations et de la propagation de la chaleur. *Ibid.*, XVI_2, 1855.

Étude de Statique physique: Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique. *Ibid.*, XXV_2 1868.

Sul principio di elasticità. — Dilucidazioni: 1° Lettera a S. E. il conte Federigo Sclopis presidente della R. Acc. delle Scienze di Torino. 2° Osservazioni del comm. Adolfo Parodi sullo scritto intitolato: « Errore del principio di elasticità formolato da L. F. Menabrea — Cenno critico di Emilio Sabbia — Torino, 1869 ». 3° Lettera del prof. cav. Gio. Barsotti. 4° Extrait de la Lettre de M. Bertrand. 5° Extrait de la Lettre de M. Yvon Villarceau. 6° Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques par M. L.-F. Ménabréa (Extrait des *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, XLVI, 31 mai 1858). 7° Altra dimostrazione del principio di elasticità. — *Atti Acc. Torino*, V, 1870.

Intorno ad uno scritto del sig. prof. Angelo Genocchi, lettera a D. B. Boncompagni. *Bull. di Bibliografia e di Storia delle scienze matem. e fisiche*, V, agosto 1872.

Un'ultima lettera sulle peripezie della serie di Lagrange, in risposta al prof. Angelo Genocchi, a D. B. Boncompagni. *Ibid.*, VI, ottobre 1873.

Montesano, D. (Roma). [*Vedi* p. 54]. Su le trasformazioni involutorie monoidali. *Rend. Ist. Lomb.*, XXI_2, 1888.

Su una classe di trasformazioni involutorie nello spazio. *Ibid.*, XXI_2, 1888.

Pascal, E. (Napoli). Relazioni fra le ellissi centrali d'inerzia delle aree ed i baricentri dei volumi generati da queste. *Rend. Acc. Napoli*, 4 settembre 1886.

Teoremi baricentrici. *Ibid.*, 23 ottobre 1886.

Sulla costruzione del poligono regolare di 257 lati. *Ibid.*, 5 febbrajo 1887.

Sopra un nuovo simbolo nella teoria delle forme binarie a due serie di variabili. *Ibid.*, 3 settembre 1887.

Sopra un metodo per esprimere una forma invariantiva qualunque di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo. *Ibid.*, 3 dicembre 1887.

Sulla risultante di un'ennica e di una cubica (estensione di un metodo di Clebsch) *Giorn. di Battaglini*, XXV, 1887.

Costruzioni geometriche di tre poligoni regolari. *Ibid.*, XXV, 1887.

Sopra una formola numerica. *Ibid.*, XXV, 1887.

Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche e di due quintiche. *Ann. di Matem.*, XVI_2, 1888.

Sopra un teorema fondamentale nella teoria del calcolo simbolico delle forme ennarie. *Rend. Acc. Lincei*, IV, 5 febbrajo 1888.

Sopra un' applicazione del metodo per esprimere una forma invariantiva di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo. *Rend. Acc. Napoli*, 4 febb. 1888.

Sopra alcune forme invariantive del sistema di due binarie biquadratiche. *Ibid.*, 4 agosto 1888.

Peano, G. (Torino). Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale. Torino, Bocca, 1887.

Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre* di G r a s s m a n n. Torino, Bocca, 1888.

Intégration par séries des équations différentielles linéaires. *Math. Ann.* XXXII, 1888.

Pincherle, S. (Bologna). [*Vedi* p. 55]. Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\Sigma\, h_\nu\, \varphi\,(x + \alpha_\nu) = f(x)$ a coefficienti razionali. *Mem. Acc. Bologna*, IX_4, 1888.

Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (Nota I^a^ e II^a^). *Rend. Acc. Lincei*, IV, 3, 17 giugno 1888.

Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie che soddisfano ad equazioni lineari differenziali o alle differenze. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Pittarelli, G. (Roma). [*Vedi* t. I, p. 113]. La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche. *Giorn. Batt.*, XVII, 1879.

Intorno a un problema di eliminazione nella teoria analitica della cubica gobba. *Ibid.*, XVII, 1879.

Le lumache di P a s c a l (Nota I^a^ e II^a^). *Ibid.*, XXI, 1883.

Le coniche e le forme binarie quadratiche e cubiche. *Ibid.*, XXI, 1883.

SCUOLA D'APPLICAZIONE PER GL'INGEGNERI IN ROMA. [*Vedi* p. 17]. Annuario per l'anno scolastico 1888-89. Roma, 1888.

Segre, C. (Torino). [*Vedi* p. 56]. C. G. C. V. S t a u d t ed i suoi lavori. Torino, Bocca, 1888.

Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori. *Rend. Circ. Mat.*, II, 1888.

Sforza, G. (Melfi). Condizione geometrica per la realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Stolz, O. (Innsbruck). [*Vedi* p. 18]. Ueber die Hauptwerthe der Kreisfunctionen. *Bericht. des naturw.-medicin. Vereines in Innsbruck*, 1887-88.

Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen. *Math. Annalen.*, XXXI, 1888.

Taschetti, G. (Palermo). Trattato di Aritmetica razionale per la IV e V classe del Ginnasio. Palermo, Remo Sandron, 1888.

Torelli, G. (Napoli). [*Vedi* p. 56]. Della trasformazione cubica di una forma binaria cubica. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1838.

Vivanti, G. (Mantova). [*Vedi* p. 56.]. Sulle funzioni definite da un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine. *Ann. Matem.*, XVI_2, 1888.

Ancora sulle funzioni ad infiniti valori. *Rend. Circ. Matem.*, II, 1888.

Weiler, A. (Zürich). [*Vedi* t. I, p. 118]. Die Axonometrie als Orthogonalprojection. *Schlömilch's Zeitschr.*, XXXIII, 1888.

Ottavo Centenario dello Studio Bolognese.

(11, 12, 13 giugno 1888).

Opere offerte in omaggio ai Rappresentanti degli Istituti scientifici commemoranti le Origini dello Studio Bolognese:

Statuti delle Università e dei Collegi dello Studio Bolognese, pubblicati da Carlo Malagola, dottore collegiato onorario della Facoltà giuridica della R. Università e direttore dell'Archivio di Stato di Bologna — Un bel volume in 4°, su carta a mano di Fabriano, di pagine XXIV-524 — Esemplare di n°. 283 — Bologna, Nicola Zanichelli, 28 maggio MDCCCLXXXVIII.

Annuario della R. Università di Bologna—Anno scolastico 1887-88—Bologna, 1887.

Catalogo dei lavori pubblicati dai professori, dottori ed assistenti della R. Università di Bologna, dal MDCCCLXIV al MDCCCLXXIV e dal MDCCCLXXV al MDCCCLXXXV — Bologna 1875, 1886.

Stabilimenti scientifici della R. Università di Bologna in rapporto col piano regolatore della Città secondo il progetto del Rettore G. Capellini — Bologna, 1888.

Liste chronologique des travaux scientifiques publiés par M. Jean Capellini — Bologne, 1888.

Guida del R. Istituto Geologico di Bologna — Bologna, 1888.

Universitati Litterarum et Artium Bononiensi feriis saeculares octavas pridie idus iunias anno P. N. C. MDCCCLXXXVIII celebranti *di* Ricardus C. Jebb, Litterarum Graecarum in Universitate Glasguensi Professor — Cantabrigiae, Typis Academicis excudebant C. J. Clay et Filii.

Ibid., versione dall'originale greco di G. Pelliccioni — Bologna, 1888.

Conosci te stesso e l'ambiente della tua attività — Dialoghi per l'istruzione popolare di Angelo Marescotti — Bologna, Zanichelli, 1888.

R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna

Unification du Calendrier — aux savants réunis à Bologne pour la Commémoration du huitième Centenaire de son Université — par M. Louis Calori, président de l'Académie. — Bologne, 1888.

R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Bologna

Notizie concernenti la Scuola e monografie dei gabinetti — Bologna 1881.

Notizie concernenti la Scuola, monografie dei gabinetti, delle collezioni e catalogo delle pubblicazioni degli insegnanti, in continuazione di quelle edite nel 1881 — Bologna, 1888.

Collegio degl'Ingegneri ed Architetti di Bologna

Archiginnasio di Bologna — Monografia di sette Tavole e Testo illustrativo del prof. cav. Raffaele Faccioli, ingegnere-architetto — Bologna, Litografia Giulio Wenk e Figli, MDCCCLXXXVIII.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

Bulletin des Sciences Mathématiques
redigé par MM. G. Darboux et J. Tannery, à Paris.
[*Vedi* pag. 30].

IIe SÉRIE. — TOME XII (1888).

MAI:

Comptes rendus et analyses.

SCHWARZ. — Ueber specielle zweifach Zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzeten Flächenstücke. (*J. T.*). (109-112).

SEYDLER. — Zakladové theoretické Fysiky; dil druhy. Theorie potencialu. (*Kolacek*). (112-118).

Mélanges.

Hadamard: Recherche de surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de poles d'inversion (118-121).

Lerch: Théorèmes d'Arithmétique (121-126).

Lelieuvre: Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique (126-128).

Revue des publications mathématiques (65-84).

JUIN:

Comptes rendus et analyses.

GREENHILL. — The trajectory for the cubic law of resistance. (*J. T.*). (129).

LAURENT. — Traité d'Analyse, t. II, t. III. (*J. T.*). (129-133).

Mélanges.

Jensen: Sur une généralisation d'une formule de M. Tchebicheff. (134-135).

Kapteyn: Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre (135-143).

Padé: Sur l'irrationnalité des nombres e et π (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite) (144-148).

Picard: Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles (148-156).

Revue des publications mathématiques (85-100).

JUILLET :

Comptes rendus et analyses.

LÉVY (M.). — Sur le principe de l'énergie. (J. T.) (157).
KOEHLER. — Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure. (158-163).
POKROVSKY. — Théorie des fonctions ultra-elliptiques de la première classe. (*Bougaief*). (164-173).

Mélanges.

Méray: Valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ déduite de la formule de Wallis (174-176).
Demartres: Sur le lieu d'un cercle doublement sécant à trois cercles fixes (176-177).
Saint-Germain (de): Sur une surface du troisième ordre qui admet une ligne ombilicale parabolique (Extrait d'une Lettre adressée à M. Darboux) (177-180).

Revue des publications mathématiques (101-116).

Zeitschrift für Mathematik und Physik.
[*Vedi* pag. 40].

33. JAHRGANG. — IV. HEFT (10. September 1888) :

Wittenbauer: Ueber gleichzeitige eines ebenen Systems (193-208).
Richter: Ueber die galvanische Induction in einem Körperlichen Leiter (209-230).
Koehler: Ueber die Form der logarithmischen Integrale einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung (231-242).

Kleinere Mittheilungen.

Doehlemann: Zur synthetischen Erzeugung der Cremona'schen Transformation vierter Ordnung (243-245).
Stoll: Herleitung der Mittelpunktscoordinaten und des Halbmessers eines Kreises aus seiner Gleichung in trimetrischen Punktcoordinaten (245-251).
Tumlirz: Zur Einführung in die Theorie der dielektrischen Polarisation (251-255).
Marek: Einfluss der Versenkung von Maassstäben in eine Flüssigkeit auf die scheinbare Länge derselben (255-256).

Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Noether: Carl Gustav Axel Harnack (121-124).
Unger: Das älteste deutsche Rechenbuch (125-145).

Recension.

HARNACK. — Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunction in der Ebene. (*Noether*). (146-148).

Bibliographie vom 1. Januar bis 31. Juli 1888 (148-149).

Mathematiches Abhandlungsregister. 1887. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni (150-160).

Nouvelles Annales de Mathématiques

Journal rédigé par MM. Ch. Brisse et E. Rouché, à Paris.

[*Vedi* pag. 30].

III^e^ Série. — Tome VII (1888).

MARS:

Fouret: Sur les pôles principaux d'inversion de la cyclide de Dupin (113-116).

Laurent: Sur la théorie de l'élimination (116-119).

Hoffmann: La solution géométrique de l'équation du quatrième degré (120-133).

Coelingh: Transformation de figures analogue à la transformation par rayons vecteurs réciproques (133-147).

Cesàro: Question de géométrie intrinsèque (147-152).

Cesàro: Sur la courbure des coniques (152-159).

AVRIL:

Stieltjes: Note sur l'intégrale $\int_a^b f(x)\, G(x)\, dx$ (161-171).

Cesàro: Sur deux classes remarquables de lignes planes (171-190).

Pomey: Sur quelques intégrales remarquables (191-194).

Pomey: Sur l'intégration de l'équation différentielle des coniques homofocales (194-196).

Jensen: Sur un théorème général de convergence (196-198).

Auric: Problème (198-199).

Biehler: Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable (200-203).

Halphen: Extrait d'une Lettre à M. Rouché (204).

MAI:

Cesàro: Remarques sur la théorie des roulettes (209-230).

Ch. B.: Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours général de 1888 (231-236).

Ferval: Solution de la question proposée au concors d'agrégation en 1887 (236-243).

Barisien: Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1887 (244-248).

Un Ancien Élève de Mathématiques spéciales: Quelques remarques géométriques à propos de la question précédente (248-252).

Niewenglowski: Solution de la question proposée en philosophie au concours général de 1884 (252-255).

JUIN :

Cesàro: Sur la potentielle triangulaire (257-268).
Ocagne (*d'*): Quelques propriétés de l'ellipse; déviation, écart normal (268-282).
Jubel-Rénoy : Sur la section d'une surface par un plan bitangent (282-287).
Bioche: Sur les minima de sommes de termes positifs dont le produit est constant (287-288).
Farjon: Note sur une propriété du cercle des neuf points (288-292).
Fontaneau : Coniques polaires d'un point et d'une droite (292-295).
Un abonné : Solution de la question proposée pour l' admission à l' École Normale Supérieure en 1887 (295-302).

JUILLET :

Ch. B. : Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique en 1888 (305-314).
Ch. B.: Solution de la question d'algèbre proposée pour l'admission à l'École Normale Supérieure en 1888 (314-317).
Malo : Solution de la question proposée au concours général de 1885 (317-325).
Payet: Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École Centrale en 1887 (325-331).
Moret-Blanc: Solution des questions proposées au concours d'agrégation en 1883 (332-341).
Jaggi: Solution de la question proposée au concours d'agrégation en 1884 (341-344).
Roussel: Solution de la question proposée au concours général en 1883 (344-347).
Farjon: Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École Normale en 1885 (348-350).
Genty : Note de géométrie (350-352).

AOÛT:

A. M. : Théorème réciproque d'un théorème de M. E. Cesàro et application (353-356).
Antomari: Recherche des points doubles dans les courbes unicursales(356-359).
Del Re: Sur une question de géométrie liée à la théorie des normales à une quadrique (359-362).
Worontzof: Sur le développement en séries des fonctions implicites (362-365).
Gilbert : Remarques sur l'intégration par partie (365-368).
Servais: Sur la courbure dans les coniques (369-374).
Cesàro: Sur les transformations de la série de Lambert (374-382).
Gomes Teixeira: Démonstration d'une formule de Waring (382-384).
Roux : Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1888 (384-391).
Niewenglowski : Solution de la question d'analyse proposée au concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1888 (391-400).
Mouchel :Deux théorèmes sur les déterminants (400).

SEPTEMBRE:

Cesàro: Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries (401-407).
Pomey: Sur le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers (407-427).
Weill: Sur une forme du déterminant de Vandermonde (427-429).
Weill: Applications des propriétés projectives des coniques (429-430).
Marchand: Discussion de l'équation en S (431-435).
Genty: Note de géométrie (436-438).
Ocagne (*d'*): Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale (438-442).
Ocagne (*d'*), *Beyens*, *Bernard*: Solutions de la question 1572 (442-447).

Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique.

[*Vedi* pag. 29].

LVII

LVIIe ANNÉE. — IIIe SÉRIE. — TOME XV (janvier-juin 1888):

Le Paige et *Deruyts* (*F.*): Sur les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective (335-347).
Le Paige: Rapport sur le travail suivant de M. J. Deruyts (935-937).
Deruyts (*J.*): Sur la théorie des formes algébriques à un nombre quelconque de variables (951-980).

Bulletin de la Société Mathématique de France.

[*Vedi* pag. 23].

TOME XVI (1888). — Nos 1-4:

Kœnigs: Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner (15-18).
Issaly: Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites (19-81).
Perrin: Sur l'identité des péninvariants des formes binaires avec certaines fonctions des dérivées unilatérales de ces formes (82-100).
Stieltjes: Sur une généralisation de la formule des accroissement finis (100-113).
Pellet: Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas (113-119).
Bioche: Sur les lignes de courbure de certaines surfaces gauches (119-124).
Delannoy: Sur la durée du jeu (124-128).
Catalan: Propositions et questions diverses (128—*à suivre*).

American Journal of Mathematics.

[*Vedi* pag. 21].

VOLUME X. — NUMBER 3 (April, 1888):

Goursat: Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent (187-204).

Heun : Remarks on the Logarithmic Integrals of Regular Linear Differential Equations (209-224).

Chapman: On some Applications of the Units of an *n*-fold Space (225-242).

Moore: A Problem suggested in the Geometry of Nets of Curves and applied to the Theory of Six Points having multiply Perspective Relations (243-257).

Humbert: Sur l'orientation des systèmes de droites (258-281).

Annals of Mathematics.

O. Stone, Editor; W. M. Thornton, Associate Editor (University of Virginia).

[*Vedi* t. I, pag. 392].

VOLUME III. — NUMBER 4 (August, 1887):

Heal: Some Properties of Repetends (97-103).

Risteen: On a Theorem Relating to Closed Plane Curves (104).

McElroy: Description of a Cubical Integrator (105-108).

Oliver: On the General Linear Differential Equation (109-111).

Johnson: On the Differential Equation $\frac{dy}{dx} + y^2 + Py + Q = 0$ (112-115).

SOLUTIONS OF EXERCISES (115-128). — EXERCISES (128).

VOLUME III. — NUMBER 5 (October, 1887):

Woodward: On the Conditioned Cooling and the Cubical Contraction of a Homogeneous Sphere (129-144).

Hill: On Differential Equations with Periodic Integrals (145-153).

Graves: On the Focal Chord of a Parabola (153).

Macfarlane: The Logical Form of Geometrical Theorems (154-155).

Schaeberle: A Short Demonstration of the Exponential Theorem (156).

F. P. L: A Treatise on Algebra (157).

SOLUTIONS OF EXERCISES (157-160). — EXERCISES (160).

VOLUME III. — NUMBER 6 (December, 1887):

Stone: On the Orbit of Hyperion (161-171).

Flint: On the Most Probable Value of the Latitude, and its Theoretical Weight, from Entangled Observations Occurring in the Use of Talcott's Method (172-185).

W. M. T.: Venable's Modern Geometry (185-186).

SOLUTIONS OF EXERCISES (186-189). — EXERCISES (190).

VOLUME IV. — NUMBER 1 (February, 1888):

Howe: A Solution of Kepler's Problem for Planetary Orbits of High Eccentricity (1-4).

McCulloch: Extension of Rolle's Theorem (5-8).

Hyde: Geometric Division of Non-Congruent Quantities (9-18).

Hill: On the Interior Constitution of the Earth as Respects Density (19-29).
EXERCISES (29-32).

VOLUME IV. — NUMBER 2 (April, 1888):

Kummell: The Problem of Relative Maxima or Minima under a New Point of View (33-35).
Graves: A Method of Finding the Evolute of the Four-cusped Hypocycloid (36).
Heal: On Certain Singularities of the Hessians of the Cubic and the Quartic (37-46).
Echols: On an Extension of Holditch's Theorem (47-48).
Moreland: Special Forms of the Momental Ellipsoid of a Body (49-53).
Stone: On the Mass of Titan (53).
O. S.: Teixeira's Infinitesimal Analysis (55).
SOLUTIONS OF EXERCISES (55-61). — EXERCISES (61-64).

VOLUME IV. — NUMBER 3 (JUNE, 1888):

Harris: The Theory of Images in the Representation of Functions (65-86).
Harris: On the Expansion of sn x (87-90).
McMahon: On a Property of an Imaginary Line passing through One of the Circular Points at Infinity (91).
Amodeo: On the Chords of a Parabola and Generally of a Conic (92).
Echols: Construction of Perspective Projections (93-95).
SOLUTIONS OF EXERCISES (95-98). — EXERCISES (98-100).

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

SERIE II. — VOL. XXI (1888). — FASCICOLI 1-14:

Ferrini: Rendiconto de' lavori della Classe di scienze matematiche e naturali (7-15).
Bardelli: Proprietà stereometriche di un sistema di forze (167-171).
Aschieri: Del legame fra la teoria dei Complessi di rette e quelle delle corrispondenze univoche e multiple dello Spazio (216-226, 285-293, 446-449).
Ascoli: Riassunto della mia Memoria: « Le curve limite di una varietà data di curve », ed osservazioni critiche alla medesima (226-239, 257-265, 294-300, 365-371).
Bertini: Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche (326-333, 413-424).
Brambilla: Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto sul piano (334-356, 511-519).
Somigliana: Sopra alcune rappresentazioni delle funzioni per integrali definiti (431-446).
Jung: Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di genere qualunque (488-495).
Segre: Sulle curve normali di genere p dei vari spazi (Estratto di Lettera al prof. E. Bertini) (523-528).
Novarese: Proprietà stereometriche dei sistemi di forze (Lettera al prof. G. Bardelli) (575-579).
Montesano: Su le trasformazioni involutorie monoidali (579-594).

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

SERIE VI^a. — TOMO VI (1886-87, 1887-88) — DISPENSE I-IX:

Lazzeri: Le curve e le sviluppabili multiple di una classe di superficie algebriche (171-188).

Favaro: Intorno ad alcune applicazioni sul metodo delle equipollenze (205-212).

Favaro: Sulla *Bibliotheca Mathematica* di Gustavo Eneström. Terza comunicazione (351-356).

Castelnuovo: Sulle congruenze del terzo ordine dello spazio a quattro dimensioni. Seconda Memoria. (525-579).

Turazza (D.): Introduzione ad un corso di statica dei sistemi variabili (701-723).

Bordiga: Dei complessi in generale nello spazio a quattro dimensioni (919-962).

Bernardi: Sopra un curioso problema di idrodinamica pratica (1309-1348).

Journal de Mathématiques élémentaires

publié sous la direction de MM. de Longchamps et Lucien Lévy, à Paris.

[*Vedi* pag. 26].

III^e SÉRIE. — XII^e ANNÉE (1888) — N^{os} 1-9 (janvier-septembre):

Salson: Sections circulaires du tore (3-5).

Liège d'Iray: Les télémètres ou télomètres (7-12).

Thiry: Considérations sur les symédianes (25-30).

Longchamps (de): Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre (30-36, 58-64, 83-89, 108-111, 133-138, 147-153, 169-181, 196-206, *à suivre*).

Fouché: Sur l'égalité et l'addition des durées (38-40).

Neuberg: Géométrie et Mécanique (49-51, 73-76).

Lemoine et *Vigarié*: Note sur les éléments brocardiens (51-56).

Griess: Un chapitre d'Arithmétique (76-82, 97-101, 131-132, 145-147).

Plamenewsky: Les équations des points remarquables (89-92, 101-104).

Gelin: Relations trigonométriques entre les trois angles d'un triangle (92-95, 104-108).

Loir: Caractère de divisibilité d'un nombre par un nombre premier quelconque (121-130).

Journal de Mathématiques spéciales

publié sous la direction de MM. de Longchamps et Lucien Lévy, à Paris.

[*Vedi* pag. 27].

III^e SÉRIE. — XII^e ANNÉE — N^{os} 1-9 (janvier-septembre):

Delassus: Une application des transversales réciproques (3-4).

Mourgue: Détermination des foyers d'une conique (4-6).

Caron: Généralisation de la méthode de M. Rouché. (6-7).

Malloizel: Note complémentaire (7-9).

Vigarié: Géométrie du triangle (9-13, 57-61, 102-104, 127-131, 182-185, 199-202).

Ocagne (d') : Remarques sur la Géométrie infinitésimale des courbes planes (25-28, 49-51, 73-76, 97-98, 121-123).

Haure : Sur le théorème et les fonctions de Sturm (28-35, 51-57, 76-80).

Poulain : Théorèmes sur les équations algébriques (80-83, 99-101, 123-127, 145-150, 169-172, 193-196).

Longchamps (de) : Un théorème sur les courbes planes fermées (83-84).

Pomey : Application d'un théorème d'Algèbre élémentaire à quelques questions de Géométrie analytique (104-109, 131-134).

Longchamps (de) : Une démonstration du théorème fondamental des Développées (109-111).

Picquet : Quelques théorèmes sur les nombres figurés et leur application à une question de probabilité (150-154, 172-176, 196-199).

Lebon : Sur le calcul de quelques intégrales (155-157, 176-180).

Ocagne (d') : Relation entre les normales dans une transformation réciproque générale (202-205).

Mathesis

Recueil mathématique publié par MM. P. Mansion et J. Neuberg (Gand).

TOME VII (1887). — TOME VIII (1888) : Nos 1-9 (janvier-septembre) :

Longchamps (de) : Sur une trisectrice remarquable (5-10).

Mansion : Sur le maximum du produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante (10-13).

Verniory : Note d'Algèbre (13-15).

Barbarin : Sur les aires de quelques triangles (15-16).

Servais : Applications de la quasi-inversion linéaire aux courbes osculatrices (28-35).

Cesàro : Développantes du point (36-38).

Mansion : Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes, d'après M. Jamet (40-44).

Sylvester : Sur les nombres parfaits (57-61).

Ocagne (d') : Note sur les points complémentaires (62-63).

Bergmans : Théorèmes sur la parabole (63-68).

Jeřábek et *Neuberg* : Sur l'hyperbole inverse de la droite de Euler (81-88).

Jamet : Compléments de la nouvelle théorie des logarithmes (89-91).

Déprez : Exercises sur les cercles tangents (91-92).

Servais : Sur la théorie des transformations (105-109).

Longchamps (de) : Sur les normales aux coniques (110-111).

Catalan : Sur les nombres parfaits (112-113).

Fuhrmann : Sur l'hyperbole Γ' (115-116).

Cesàro et *Catalan* : Sur un théorème de M. Oltramare (129-130).

Brocard : Question de licence (130-131).

Ocagne (d') : A propos d'une Note récente sur le triangle (131-132).

Mansion : Méthode des infiniment petits (149-157).

Neuberg: Sur les transformations quadratiques involutives (177-183).

Cesàro: Moments d'inertie du triangle et du tétraèdre (183-186).

Wasteels: Démonstration géométrique et généralisation du théorème de Viviani (186-188).

SUPPLEMENTS :

Gelin: La Monnaie (1-16).

Le Paige et *Deruyts* (*F.*): Sur les théorèmes fondamentaux de la Géométrie projective (1-15).

Gelin: Calcul des lignes trigonométriques des arcs du premier quadrant (1-7).

Gelin: Questions diverses de Trigonométrie (1-15).

Laisant: Notice historique sur les travaux des première et deuxième sections, de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, de 1879 à 1886 inclusivement (Congrès de Toulouse, 1887).

Acta Mathematica

(Rédacteur en chef: G. Mittag-Leffler, à Stockholm).

[*Vedi* pag. 34-40].

TOME XI. — NUMERO 4 (31 août 1888):

Staude: Ueber die Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche (303-332).

Weber: Zur Theorie der elliptischen Functionen (zweite Abhandlung) (333-390).

Lilienthal: Bemerkung über diejenigen Flächen bei denen die Differenz der Hauptkrümmungsradien constant ist (391-394).

Ptaszycki: Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques (395-400).

PRIX OSCAR II — Mémoires présentés au concours (401-402).

Jornal de Sciencias Mathematicas et Astronomicas

publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira (Coimbra).

[*Vedi* t. I, p. 394].

VOLUME VIII (1887-88). — N[i] 1-4:

Lerch: Sur un théorème relatif à la théorie des fonctions elliptiques (Extrait d' une Lettre adressée à F. Gomes Teixeira) (3-10).

Novarese: Note sur les nombres parfaits (11-14).

Cesàro: Remarques sur la théorie des séries (Extrait d'une Lettre adréssée à F. Gomes Teixeira) (15-16).

Gomes Teixeira: Sobre o desenvolvimento em serie das funcções de variaveis imaginarias (17-24).

Guimarães: Nota relativa á rectificação dos arcos de ellipse (30-32).

Gutzmer: Sur une série considérée par M. Lerch (Extraits de deux Lettres adréssées à F. Gomes Teixeira) (33-36).

Le Pont: Note de calcul intégral (37-42).

Le Pont: Note sur les lignes asymptotiques et les lignes de courbure (43-45).
Schiappa Monteiro: Note sur le triangle isoscèle (51-58).
Rodrigues: Nota sobre a serie de Lagrange (59-64).
Le Pont: Deuxième note de calcul intégral (65-71).
Gutzmer: Remarques sur la théorie des séries (Extrait d'une Lettre adressée à F. Gomes Teixeira) (81-88).
Weyr (Ed.): Deux remarques relatives aux séries (Extrait d'une Lettre adressée à F. Gomes Teixeira) (97-100).
Ocagne (d'): Note sur un problème d'Arithmétique (101-103).
Ocagne (d'): Note sur les coniques (104-108).
Gomes Teixeira: Sobre a derivação das funcções compostas (120. *Continua*).

Proceedings of the Royal Society (London).

[*Vedi* pag. 48].

VOL. XLIV (1888). — No. 270 (June 7, 14, 21):

Russel: On certain Definite Integrals (311-314).
Russel: Theorems in Analytical Geometry (388-392).

» — No. 271.

Crónica Cientifica

Revista Internacional de Ciencias, redactada por Don *Rafael Roig y Torres*.

Año XI. — Núm. 265 (25 de Noviembre de 1888).

Wiskundige Opgaven

met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap.

DERDE DEEL. — STUK 1., STUK 2. (1887).

Nieuw Archief voor Wiskunde.

[*Vedi* t. I, pag. 395].

DEEL XIV — STUK 1. (1887).

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[*Vedi* t. I, pag. 392].

Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.

[*Vedi* t. I, pag. 393].

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Berichte der K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften
(Mathematisch-Physische Classe).

Philosophical Transactions of the Royal Society (Series A).

Raccolta matematica della Società Matematica di Mosca.
[*Vedi* t. I, pag. 91].

Tomo XIII — Fascicoli 2, 3, 4 (1887).

Revue Scientifique.
[*Vedi* pag. 48].

IIIème Série. — Tome XVI (XLII de la collection) [Deuxième Semestre 1888].

Nos 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. — N° 14 (6 octobre):

Langlois: La vie et l'œuvre de Rodolphe Clausius (424-428).

N° 15 (13 octobre):

Barré: Démonstration du carré de l'hypoténuse basée sur les théorèmes du premier livre de géométrie (476-477).

Nos 16, 17, 18, 19, 20, 21. — N° 22 (1er décembre):

Catalan: Sur le carré de l'hypoténuse (717-718).

Bulletin Scientifique.

Journal des candidats aux Examens et Concours de l'Enseignement secondaire spécial, de l'Enseignement des Jeunes Filles, de l'Enseignement primaire supérieur; rédigé par M. Ernest Lebon, à Paris.

Troisième Année (1888-89).

N° 1 (20 octobre 1888):

Russo, de Longchamps: Questions proposées (1-2).

A. R., Labbé, Peitz, Gallois, Maleysson, Laborde, Julien, Prax, Biez, Marie, Dubost-Southon: Questions resolues (3-14).

N° 2 (20 novembre 1888):

Lebon: Question proposée (42).

Duval, Meunier, Laborde, Porcher, Arzur, Bazeille, Arnaud, Moriez, Grapin: Questions résolues (43-55).

Longchamps (de): Applications élémentaires des premiers principes de la géométrie analytique (60-65).

Circolo Giuridico (Il).
Rivista diretta da L. S a m p o l o, in Palermo.

VOLUME XIX (IX della SECONDA SERIE) (1888). — N° 1-7 (gennajo- luglio).

Giornale di Matematiche
ad uso degli studenti delle Università Italiane,
pubblicato per cura del prof. G. B a t t a g l i n i, in Napoli.

[*L'intera collezione di questo Periodico essendo stata donata alla Biblioteca del Circolo, dal direttore G. B a t t a g l i n i (cfr. t.* I, *p.* 31) *e dall'editore B. P e l l e r a n o, nel prossimo volume* (1889) *dei* RENDICONTI (*Parte* 2ª) *saranno pubblicati gl' indici generali delle materie contenute nei tomi* I-X, XI-XX, XXI-XXVI].

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario
diretto da D a v i d e B e s s o ed A u r e l i o L u g l i (Roma).
[*Vedi* pag. 23].

ANNO III (1888). — FASCICOLI 1-4 (gennajo-agosto):

Giudice: Alcune formole ottenibili semplicemente che possono servire al calcolo approssimato delle funzioni circolari (1-7).
Panizza: Piccolo contributo alla teoria geometrica dell'equivalenza (8-13).
Mollini: Formole sulle annualità in progressione aritmetica (14-19).
Giudice: Sull'estrazione di radice approssimata dai numeri aritmetici (33-36).
Panizza: Costruzione di triangoli isobaricentrici con un dato (37-39).
Giuliani: Sopra un teorema della divisione algebrica (39-40).
Suini: Contribuzione alla teoria delle coniche (65-69).
Amodeo: Correlazione fra i teoremi delle operazioni sui numeri interi (69-75, 103-108).
Fellini: Proprietà delle circonferenze concentriche rispetto all'equivalenza geometrica (75-79).
Panizza: Nota sui poliedri regolari e semi-regolari convessi (80-82, 109-118).
Ricordi: Sull'approssimazione dell' ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche (97-103).
Lugli, Besso, Scoto: Esercizi per la scuola (19-24, 41-55, 83-88, 119-121).

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien.
(Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe)

XCVII. BAND—JAHRGANG 1888.

I. und. II. HEFT (Jänner und Februar):

Gegenbauer: Ueber ein Theorem des Herrn E. de J o n q u i è r e s (82-89).
Gegenbauer: Ueber Determinanten (154-163).
Waelsch: Beiträge zur Flächentheorie (164-174).

III. und IV. HEFT (März und April):

Schuster: Ueber jene Gebilde, welche geschlossenen, aus drei tordirten Streifen hergestellten Flächen durch gewisse Schnitte entspringen (217-246).

Gegenbauer: Ueber die Functionen C_n^ν (x) (259-270).

Gegenbauer: Zwei Eigenschaften der Primzahl 3 (271-276).

Kohn: Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung (325-328).

Hepperger: Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation (337-362).

Gegenbauer: Notiz über gewisse binäre Formen, durch welche sich keine Potenzen von Primzahlen darstellen lassen (368-373).

Gegenbauer: Note über die Anzahl der Primzahlen (374-377).

Gegenbauer: Zahlentheoretische Notiz (420-426).

Gegenbauer: Note über das quadratische Reciprocitätsgesetz (427-431).

V. HEFT (Mai):

Mertens: Ueber die invarianten Gebilde einer ternären cubischen Form (437-518).

Mertens: Invariante Gebilde von Nullsystem (519-537).

Waelsch: Ueber das Normalensystem und die Centrafläche der Flächen zweiter Ordnung (583-590).

Weyr (Emil): Ueber Raumcurven fünfter Ordnung von Geschlechte Eins (592-617).

Mertens: Ueber die Ermittelung der Theiler einer ganzen ganzzahligen Function einer Veränderlichen (618-621).

Mélanges Mathématiques et Astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie Impériale de St.-Pétersbourg.

TOME VI.

LIVRAISON 1 (1883):

Bonsdorff: Ueber einen neuen Connex im Raume (13-31).

Bouniakowsky: Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique $E(x)$. Article 1er (87-101) — Article 2d (113-134).

Vaněček (J.-S.): Sur des surfaces de 2ème, 3ème et du 4ème ordre (107-112).

Backlund: Sur le Mémoire de M. Lindstedt: Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie (*Rapport*) (141-143).

LIVRAISON 2 (1884):

Bouniakowsky: Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique $E(x)$. Article 3ème (169-201).

Vaněček (J.-S. et M.-N.): Sur le contact des figures inverses avec les figures polaires réciproques des figures directrices (203-214).

Hermite: Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques (247-286).

LIVRAISON 3 (1885):

Backlund: Ueber die Anwendung einer von P. Tschebyschew vorgeschlagenen Interpolationsmethode (287-315).

Bouniakowsky: Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique $E(x)$. Article 4ème (317-340).

LIVRAISON 4 (1886):

Vaníček (*J.-S.* et *M.-N.*): Nouvelle génération d'un faisceau de coniques (405-427).

Bonsdorff: Ableitung neuer Formeln zur Auflösung sphäroidischer Dreiecke (429-448).

Backlund: Dr. Harzer's Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper (Bericht an die Akademie der Wissenschaften) (519-538).

Comptes Rendus de l'Association Française pour l'avancement des Sciences.

XVIème SESSION (Toulouse, 1887) — 2e Partie (Notes et mémoires):

Astor: Lignes géodésiques des surfaces réglées dont les génératrices coupent la ligne de striction sous un angle constant, et dont le paramètre de distribution est constant (1-12).

Barbarin: Retrouver les éléments d'une surface de révolution dont on ne possède qu'un fragment (123-126).

— Sur les racines de l'équation du 3ème ordre (126-127).

Berdellé: Arithmétique des directions et rotations (197-206).

— La numération binaire et la numération octavale (206-209).

— Boite à multiplication (210-211).

Cayley: Note sur la transformation du septième ordre, des fonctions elliptiques (211-213).

Collignon: Problème de Mécanique (42-63).

— Sur une méthode approximative pour la trisection de l'angle, imaginée par M. E. Fortin (141-164).

Dormoy: Théorie mathématique des jeux de bourse (214-215).

Escary: Sur la représentation d'une fonction arbitraire au moyen d'une série convergente ordonnée suivant des polynômes dépendants des coordonnées elliptiques dans le plan (63-74).

Haro: Note sur une nouvelle méthode de notation graphique des logarithmes (128-132).

Kluyver: Sur un système d'invariants communs à deux coniques (132-141.)

Laisant: Sur les asymptotes de l'hyperbole de Kiepert (113-114).

— Quelques applications arithmétiques de la Géométrie des quinconces (218-235).

— Sur l'inversion d'un système de n points; construction de deux points remarquables du triangle (282-285).

Langlois: Sur l'homogénéité de la formule fondamentale du mouvement atomique (235-241).

Lemoine: Questions diverses sur la nouvelle géométrie du triangle (13-42).

Le Pont: Note de Géométrie (119-122).

Mantel: Nouvelle théorie des couples et de la composition des forces (257-263).

Oltramare: De l'intégration des équations linéaires à coefficients constants (75-87).

Oltramare: Mémoire sur les principes généraux du calcul de généralisation (285-305).
Pellet: Sur les sphères tangentes à deux surfaces (116-118).
Pichou: La roue universelle Pichou (242-256).
Rindi: Sur les normales doubles des surfaces algébriques (216-218).
Schlegel: Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions (264-266).
— Sur les distances moyennes entre un point et des variétés de points, discrètes ou continues (266-281).
Schoute: Sur un complexe du troisième ordre (189-197).
Sylvester: Sur les nombres dits de Hamilton (164-168).
Tarry: Essai sur la géométrie des figures imaginaires (168-188).
Tellier: Nouveau moteur thermo-dynamique (114-116).
Vigarié: Premier inventaire de la géométrie du triangle (87-112).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

VOLUME XXIII (1887-88).

Zanotti-Bianco: Alcuni teoremi sui coefficienti di Legendre (5-25).
Jadanza: Sul calcolo degli azimut mediante le coordinate rettilinee (89-106).
D'Ovidio: Relazione sulla Memoria del dott. Corrado Segre « Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario » (146-147).
Jadanza: Sullo spostamento della lente anallattica e sulla verticalità della stadia (294-302).
Ovazza: Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati (384-401).
Morera: Sul problema della corda vibrante (402-417).
Siacci: Sulla compensazione delle poligonali che servono di base ai rilievi tipografici (430-432).
Pizzetti: Gli azimut reciproci di un arco di geodetica (433-448).
Jadanza: Una nuova forma di cannocchiale (570-573).
Ovazza: Sul calcolo delle freccie elastiche delle travi reticolari (625-636).

Journal für die reine und angewandte Mathematik,

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs, von L. Kronecker.

BAND CIV.

HEFT 1 (5. November 1888):

Thomé: Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen (1-31).
Buscbe: Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie (32-37).
Stahl: Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven (38-61).

Schroeter: Zurückführung der Grassmann'schen Definitionen der Curve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen (62-84).

Rudio: Ueber eine specielle Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt (85-88).

Annali di Matematica pura ed applicata,

diretti dal prof. Francesco Brioschi, colla cooperazione dei professori L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati.

SERIE II. — TOMO XVI.

FASCICOLO 1° (maggio 1888):

Casorati: Sopra le *coupures* del sig. Hermite, i *Querschnitte* e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa (*Continua*) (1-20).

Maggi: Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo (21-48).

Bettazzi: Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari (49-60).

Pirondini: Teorema relativo alle linee di curvatura delle superficie e sue applicazioni (61-84).

FASCICOLO 2° (settembre 1888):

Pascal: Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche e di due quintiche (85-99).

Somigliana: Sopra la dilatazione cubica di un corpo elastico isotropo in uno spazio di curvatura costante (101-115).

Vivanti: Sulle funzioni definite da un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine (117-136).

Pirondini: Studio sulle superficie elicoidali (137-177).

Cesàro: Sur une proposition de la théorie asymptotique des nombres (178-180).

Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo.

(Direttore: G. Cacciatore).

VOLUME I (1880-81). — VOLUME III (1883-84-85).

Bullettino Meteorologico del R. Osservatorio di Palermo.

(Sezione Meteorologica a *Valverde* annessa alla « Società di Acclimazione »).

VOLUMI I-VIII (1880-1887).—VOLUME IX (1888): FASCICOLI 1-10 (gennajo-ottobre).

Educational Times and Journal of the College of Preceptors.

NEW SERIES. — VOL. XLI (1888).

No. 331 (November 1):

Belle Easton, Biddle, Genese, Greenstreet, Hervey, Knowles, Langley, Mats, Neuberg, Provost, Sarah Marks, Schoute, Storr, Rees, Wolstenholme: Soluzioni di quesiti (447-448).

Abinash Basu, Amigues, Artemas, Barbarin, Beyens, Biddle, Bordage, Brill, Catalan, Christie, Crofton, Croke, Déprez, Editor (The), Emmerich, Finkel, Genese, Greenstreet, Hanumanta Rau, Hermite, Hudson, Kalipada Basu, Knowles, Lemoine, Lévy, Longchamps (de), Malet, Martin, Mayon, McVicker, Mukhopadhydy, Neuberg, N'Importe, O'Byrne, Ocagne (d'), Orchard, Rees, Reuchle, Roach, Rocquigny (de), Russell, Schoute, Simmons, Sylvester, Tucker, Wachter (de), Wetzig, Wolstenholme, Young: Quesiti proposti [Quests. 9829 to 9875] (448-450).

No. 332 (December 1):

Beyens, Biddle, Genese, Goldthorpe Storr, Greenstreet, Kitchin, Knowles, Langley, MacMahon, Madison, Morrice, Neuberg, Sarah Marks, Schoute, Sircon, Tetley, Wachter (de), Williams, Young: Soluzioni di quesiti (487-489).

Artemas Martin, Barbarin, Biddle, Casey, Catalan, Déprez, Editor (The), Emmerich, Finkel, Genese, Gob, Greenstreet, Greiner, Hain, Hervey, Knowles, Laisant, Langley, Lemoine, Longchamps (de), Madhavarao, Malet, McVicker, Neuberg, Ocagne (d'), Orchard, Purser, Roberts, Rocquigny (de), Russell, Schoute, Steede, Steggall, Simmons, Sylvester, Wachter (de), Wolstenholme: Quesiti proposti [Quests. 9892 to 9928] (489-490).

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution.

1885 — PART II.

Atti del Collegio degli Ingegneri e degli Architetti in Palermo.

[*Vedi* t. I, pag. 392]

ANNO 1887 : FASCICOLI 2, 3. — ANNO 1888 : FASCICOLI 1. 2.

G. B. G.

INDICE

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

COLLE QUALI IL CIRCOLO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti.*

Fine della Parte 2ª del Tomo II (1888).

Tip. matematica di Michele Amenta, Palermo.